Université Joseph Fourier
Master1, mathématiques

Algèbre 2, devoir surveillé n°1

le 8 mars 2011, de 9h45 à 11h30

Aucun document n'est autorisé. Chaque réponse doit être justifiée.

I

Vrai ou Faux? Pour chaque question, on veillera à *détailler* l'argument.

a) Il existe un caractère χ de degré 1 d'un groupe fini G qui n'est *pas* un morphisme $G \to \mathbb{C}^\times$.

b) Pour toute sous-représentation W d'une représentation V d'un groupe fini G, il existe une sous-représentation W' de V telle que $V = W \oplus W'$.

c) Il existe un unique caractère χ associé à une représentation du groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ qui vérifie $\chi(\overline{0}) = 11$ et $\chi(\overline{1}) = 2 - i\sqrt{3}$.

II

Soit G un groupe abélien fini. On se donne un élément f de son algèbre de groupe $\mathbb{C}[G]$. On considère l'endomorphisme $\Phi_f : u \mapsto f * u$ de $\mathbb{C}[G]$.

a) Expliciter $\Phi_f(\delta_g)$ $(g \in G)$ dans la base $(\delta_h)_{h\in G}$ de $\mathbb{C}[G]$.

b) Calculer la transformée de Fourier de $f * \chi$ $(\chi \in \widehat{G})$.

c) En déduire que les éléments de $\widehat{G}$ sont vecteurs propres pour Φ_f.

d) En déduire une expression de $\det(\Phi_f)$.

T.S.V.P.

III

a) Expliciter le caractère de la représentation régulière R du groupe $\mathfrak{S}_3$.

On considère l'action usuelle de $\mathfrak{S}_3$ sur l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ par permutation des indéterminées.

b) Quelle est l'orbite ω de $X_1^2 X_2$?

c) On note V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$ engendré par ω. Montrer que V est une représentation par permutation de degré 6 de $\mathfrak{S}_3$.

d) Déterminer le caractère χ de V.

e) Donner la décomposition de V en somme directe de représentations irréductibles, à isomorphisme près.

f) Décrire tous les morphismes de représentation de V dans la représentation unité U de $\mathfrak{S}_3$ (on ne demande pas leur expression explicite).

g) On note W la représentation $V \otimes V$ de $\mathfrak{S}_3$, et Z la représentation $\Lambda^2 V$. Déterminer le caractère de ces deux représentations, ainsi que le nombre de fois que la représentation alternée U' de $\mathfrak{S}_3$ (de dimension 1), apparaît dans Z.

◇ ◇ ◇ ◇