Institut Fourier
M1 Algèbre 2

**Devoir à la maison n°2**
à rendre la semaine du 8 avril 2010

## I

**1.** Soient $G$ et $G'$ deux groupes finis.

**a)** Déterminer les classes de conjugaison de $G \times G'$. En déduire une base de $\mathcal{F}_{\text{centrales}}(G \times G')$.

Soient $\chi_1, \ldots, \chi_s$, resp. $\chi'_1, \ldots, \chi'_t$ les caractères irréductibles de $G$, resp. $G'$. Pour tout couple $(i, j)$ avec $1 \le i \le s$ et $1 \le j \le t$, on note $\varphi_{ij} \colon G \times G' \to \mathbb{C}$ l'application $(g, g') \mapsto \chi_i(g)\chi'_j(g')$.

**b)** Justifier que chaque $\varphi_{ij}$ est un caractère de $G \times G'$.

**c)** Montrer que les caractères irréductibles de $G \times G'$ sont exactement les caractères $\varphi_{ij}$ $(1 \le i \le s,\ 1 \le j \le t)$.

**2.** Soit $(R, \rho)$ la représentation régulière de $G$, associée à la base $(e_g)_{g \in G}$ de $R$.

**a)** Justifier qu'on définit une représentation $\tau$ de $G \times G$ sur $R$ en posant $(x, y) \cdot e_g = e_{xgy^{-1}}$ $(g, x, y \in G)$. Déterminer son caractère noté $\varphi$.

**b)** Déterminer la décomposition de $(R, \tau)$ en somme de représentations irréductibles, à isomorphisme près.

**c)** Expliciter le lien entre les composantes isotypiques de $(R, \tau)$ sur $G \times G$ et celles de $(R, \rho)$ sur $G$.

## II

Soit $G$ un groupe fini. On note $C_1, \ldots, C_n$ les classes de conjugaison de $G$, et $\delta_1, \ldots, \delta_n$ leurs fonctions caractéristiques, vues comme applications de $G$ dans $\mathbb{C}$.

**1.** Soit $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible de $G$ de caractère $\chi$. Pour tout $i$ dans $\{1, \ldots, n\}$, on note $f_i = \sum_{g \in C_i} \rho(g)$.

**a)** Montrer que $f_i$ est une homothétie de rapport $|C_i| \frac{\chi(C_i)}{\chi(1)}$, où on note $\chi(C_i)$ la valeur de $\chi$ sur la classe $C_i$.

**b)** Montrer que pour tous $i, j$, on a $f_i \circ f_j = \sum_{k=1}^{n} \xi_{i,j,k} f_k$, où, pour tout $k$ et pour tout $x \in C_k$, $\xi_{i,j,k}$ est le nombre de couples $(a, b) \in C_i \times C_j$ tels que $x = ab$.

**2.** Déduire de 1. à l'aide d'une relation d'orthogonalité convenable:

$$\xi_{i,j,k} = \frac{|C_i||C_j|}{|G|} \sum_{\chi \text{ irréductible}} \frac{\chi(C_i)\chi(C_j)\overline{\chi(C_k)}}{\chi(1)}.$$

**3.** À l'aide de la table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et du résultat précédent, montrer les propriétés suivantes :

**a)** $\mathfrak{S}_4$ ne possède pas deux éléments d'ordre 4 dont le produit est un élément d'ordre 4.

**b)** $\mathfrak{S}_4$ possède un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3 dont le produit est d'ordre 4.

**c)** $\mathfrak{S}_4$ possède deux éléments $a$ et $b$ d'ordre 2 dont le produit $x = ab$ est d'ordre 4. Montrer que le groupe engendré par $a$ et $b$ est isomorphe à $D_4$, le groupe diédral d'ordre 8.

- $\diamondsuit$ -