Institut Fourier
M1 Algèbre 2

Devoir à la maison n°1
à rendre la semaine du 23 février 2010

Exercice 1 Donner deux représentations fidèles du groupe $G = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ sur $\mathbb{C}$, qui sont de même dimension mais non isomorphes (justifier). Déterminer pour chacune la sous-algèbre $\mathrm{Hom}_G(V, V)$.

Exercice 2 Soient G un groupe fini, et (V, ρ) une représentation complexe de G.

1. On se donne un produit scalaire hermitien h sur V, et on souhaite montrer que ρ est isomorphe à une représentation *unitaire* ρ' de G (c'est–à–dire telle que

$$h(\rho'(g)(v), \rho'(g)(w)) = h(v, w)$$

pour tous $g \in G$, et $v, w \in V$, i.e. chaque $\rho'(g)$ est unitaire pour (V, h)).

a) Donner une action naturelle de $GL(V)$ sur l'ensemble $\mathcal{H}$ des produits hermitiens sur V. Montrer qu'elle est transitive.

b) Construire sous forme de moyenne un produit hermitien h' sur V tel que:

$$h'(g \cdot v, g \cdot w) = h'(v, w)$$

pour tous $g \in G$, et $v, w \in V$ (autrement dit $\rho(G)$ est inclus dans le groupe unitaire associé au produit hermitien h'; on dit que h' est *G-invariant*).

c) Conclure avec a) que ρ est isomorphe à une représentation (V, ρ') de G qui est unitaire pour h.

2. On suppose ici que (V, ρ) est irréductible, et que h *et* h' sont deux produits scalaires hermitiens G–invariants sur V.

a) Montrer qu'il existe $u \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, tel que pour tous $v, w \in V$, $h'(v, w) = h(v, u(w))$.

b) Montrer que u est un morphisme de représentations.

c) En déduire qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $h' = ch$.

3. Reprendre l'exercice en prenant pour V un $\mathbb{R}$–espace vectoriel, et en remplaçant chaque fois "produit hermitien" par "produit scalaire", "unitaire" par "orthogonal" et $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

- $\diamondsuit$ -