

Algèbre 2, devoir surveillé n°2

le 22 avril 2010, de 13h30 à 15h

Aucun document n'est autorisé. Chaque réponse doit être justifiée.

I

Soient G un groupe fini non trivial, et χ un caractère de G qu'on suppose constant sur $G \setminus \{e\}$. On note χ_U le caractère de la représentation unité, et χ_R celui de la représentation régulière de G .

- Montrer que χ s'écrit $a\chi_U + b\chi_R$, pour certains nombres complexes a et b .
- Montrer que $a + b$ et $a + b|G|$ sont dans \mathbb{N} .
- Soit φ un caractère irréductible de G distinct de χ_U . Montrer que $b\varphi(e) \in \mathbb{N}$.
- En déduire que $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$.

II

Soit V une représentation du groupe fini G . On note χ son caractère et h l'application linéaire $V \rightarrow V: v \mapsto \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} g \cdot v$.

- L'application h est-elle un morphisme?
- Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de h .

III

Compléter la table de caractères:

1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	-1	-1
1					
1	-1	-1		-1	1
2	-2	1	-1	0	0

T.S.V.P.

IV

Soit G un groupe fini dont la table des caractères apparaît ci-dessous (on note K_i , $1 \leq i \leq 6$, les classes de conjugaison de G ; pour chaque i , on notera g_i un élément de K_i et (V_i, ρ_i) une représentation de G de caractère χ_i).

	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6
χ_1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	1	-1	-1
χ_3	1	-1	-1	1	1	-1
χ_4	1	-1	-1	1	-1	1
χ_5	2	-2	1	-1	0	0
χ_6	2	2	-1	-1	0	0

- a) Quelle classe K_i est celle de l'élément neutre? Déterminer le cardinal de G et son sous-groupe $D(G)$.
- b) Déterminer la structure de l'abélianisé G_{ab} de G .
- c) Montrer que pour tout $x \in G$, $x^2 \in D(G)$. Conclure que G n'a pas d'élément d'ordre 4.
- d) Déterminer l'ordre de g_5 et de g_6 .
- e) Déterminer le centre C de G et son ordre.
- f) En déduire la structure du sous-groupe $H = \text{Ker } \rho_2$ de G .
- g) Quel est l'ordre de g_3 ?
- h) Déterminer la structure du sous-groupe $K = \text{Ker } \rho_3$. A-t-on $G \simeq K \times C$?

◇◇◇◇