Université Joseph Fourier
L3 MAT36e

Devoir surveillé n°1
mardi 13 mars 2012, 15h–16h30

Aucun document n'est autorisé.

1. Questions

a) Donner la définition d'une fonction analytique sur un ouvert U de $\mathbb{C}$.

b) Soit D^* le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, privé de 0. Existe–t–il f fonction analytique sur D^*, non constante, telle que $f(1/n) = 0$ pour tout entier $n \geq 2$?

2. Exercice

a) Donner une primitive de $z \to \frac{1}{1+z}$ sur l'ouvert $\mathrm{Re}(z) > -1$ de $\mathbb{C}$.

b) On note γ_1 le segment de 0 à i, γ_2 le demi–cercle de diamètre $[0, i]$ passant par $(1 + i)/2$, orienté de 0 à i.
Calculer $I_1 = \int_{\gamma_1} \frac{1}{1+z}\, dz$. En déduire la valeur de $I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{1}{1+z}\, dz$.

3. Exercice

Soit γ le cercle unité parcouru dans le sens direct. Evaluer l'intégrale:

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2(z+3)}\, dz.$$

4. Exercice

Soit $R > 0$ et soit U un domaine de $\mathbb{C}$ qui contient le disque ouvert $D(0, R)$ de centre 0 et rayon R. On considère une fonction holomorphe f sur U. Pour $r \in]0, R[$, on note $m(r) = \sup\{\, |f(z)|\, ;\, |z| = r\}$.

a) Montrer que la fonction m est croissante.

b) Si f n'est pas constante sur U, m est–t–elle strictement croissante?

c) Soit $c > 0$. Existe–t–il f fonction holomorphe sur U telle que pour tout $z \in U$, $|f(z)| = |z|^2 + c$?

5. Exercice

a) Soit $u \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $z \mapsto y^3 - 3x^2y + 3x$, où $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. La fonction u est–elle harmonique?

b) Trouver toutes les fonctions f holomorphes sur $\mathbb{C}$ dont la partie réelle est u.

- $\diamondsuit$ -