Master de Mathématiques **Examen, session 1** **(3 heures)** Université J. Fourier
MAT4117 – EDO et EDP **Éléments de correction** 2015-2016

Exercice 1.
L'espace $\mathbb{R}^d$ est muni de son produit scalaire canonique, noté $(\cdot \mid \cdot)$. On note $|\cdot|$ la norme associée. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application localement lipschitzienne vérifiant, pour un $\alpha > 0$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad (f(y) - f(x) \mid y - x) \geq \alpha |y - x|^2. \tag{1}$$

Le but de l'exercice est de montrer que f est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^d$ sur lui-même.
1) Montrer que f est injective.
Si $f(y) = f(x)$, par la relation (1), on obtient $y = x$.
2) On montre ici que 0 est dans l'image de f.
a) Soit x et y deux solutions de l'équation différentielle $z' = -f(z)$ sur l'intervalle $[0, T]$, pour un $T > 0$. Montrer que

$$\forall t \in [0, T], \quad |y(t) - x(t)| \leq |y(0) - x(0)|\, e^{-\alpha t}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|y - x|^2) &= 2(y' - x' \mid y - x), \\ &= -2(f(y) - f(x) \mid y - x) \\ &\leq -2\alpha |y - x|^2, \end{aligned}$$

d'où $|y(t) - x(t)|^2 \leq |y(0) - x(0)|^2 e^{-2\alpha t}$, pour tout $t \in [0, T]$.
b) Dans la suite, x désigne la solution maximale du problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' &= -f(x), \\ x(0) &= 0. \end{cases}$$

On note $]T_-, T_+[$ son intervalle de définition (avec $T_-, T_+ \in]0, +\infty[$). En appliquant a) à x et à $t \mapsto x(t + h)$ avec $|h|$ assez petit, montrer que

$$\forall t \in [0, T_+[, \quad |x'(t)| \leq |x'(0)|\, e^{-\alpha t}.$$

On fixe $T \in]0, T_+[$. La fonction $y : t \mapsto x(t + h)$ est définie (et vérifie $y' = -f(y)$) sur $]T_- - h, T_+ - h[$, qui contient $[0, T]$ pour $|h|$ assez petit. On obtient l'inégalité voulue sur $[0, T]$ en divisant celle de la question précédente par $h \neq 0$ et en faisant tendre h vers 0. Comme T est quelconque dans $]0, T_+[$, on a finalement l'inégalité sur $[0, T_+[$.
c) Montrer que x est bornée sur $[0, T_+[$, et que $T_+ = +\infty$.
On a, pour tout $t \in [0, T_+[$:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\int_0^t x'(t')\mathrm{d}t', \\ \textit{donc} \quad |x(t)| &\leq |x'(0)| \int_0^t e^{-\alpha t'}\mathrm{d}t' \leq |x'(0)| \int_0^\infty e^{-\alpha t'}\mathrm{d}t' = \frac{|x'(0)|}{\alpha}. \end{aligned}$$

Avec le critère d'explosion en dimension finie, cette borne implique que $T_+ = +\infty$.
d) Montrer que $x(t)$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^d$ lorsque t tend vers $+\infty$, et que $f(\ell) = 0$.
Comme $|x'|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, x' aussi, et donc $x(t)$ tend vers $\ell = -\int_0^\infty x'(t')\mathrm{d}t'$ lorsque t tend vers $+\infty$. Par continuité de f (localement lipschitzienne) et par la relation $x' = f(x)$, on voit que $x'(t)$ tend vers $f(\ell)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Mais le résultat de b) implique alors que $f(\ell) = 0$.
3) Montrer que f est surjective.

Pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, la fonction $f - z$ vérifie les mêmes hypothèses que f. On peut donc lui appliquer ce qui précède, et trouver $\ell_z \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(\ell_z) = z$.
4) Montrer que l'application réciproque de f vérifie

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(x)| \leq \alpha^{-1}|y - x|,$$

et conclure.
On sait déjà que f est continue et bijective. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (1) *implique*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha|x - y|^2 \leq |f(x) - f(y)|\,|x - y|.$$

Distinguant les cas $x = y$ et $x \neq y$, on en déduit :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha|x - y| \leq |f(x) - f(y)|.$$

Lorsque $x, y \in \mathbb{R}^d$, en appliquant cela non pas à x et y, mais à $f^{-1}(x)$ et $f^{-1}(y)$, on obtient l'inégalité voulue, qui exprime la continuité de f^{-1}.

Exercice 2.
On étudie ici le problème de Cauchy associé à l'équation

$$\partial_t u + \partial_x^3 u = -u^3 \qquad (t, x \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Toutes les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R})$, et aussi $\hat{f} = \mathcal{F}f$.
1) a) Donner la définition de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ et de sa norme $\|\cdot\|_{H^s}$, pour $s \geq 0$.

$$H^s(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \xi \mapsto (1 + |\xi|^2)^{s/2}\hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}, \quad \|f\|_{H^s} = \|(1 + |\cdot|^2)^{s/2}\hat{f}\|_{L^2}.$$

b) Soit $s > 1/2$. Montrer que que si $f \in H^s(\mathbb{R})$, alors $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, et montrer que $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte continument dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi \leq \|(1 + |\cdot|^2)^{-s/2}\|_{L^2}\|f\|_{H^s},$$

qui est fini dès que $s > 1/2$. Par ailleurs, la formule d'inversion de Fourier $f = (2\pi)^{-1}\overline{\mathcal{F}}\hat{f}$ implique que f est continue et bornée, avec

$$\|f\|_{L^\infty} \leq (2\pi)^{-1}\|\hat{f}\|_{L^1} \leq (2\pi)^{-1}\|(1 + |\cdot|^2)^{-s}\|_{L^1}\|f\|_{H^s},$$

donc $H^s(\mathbb{R})$ s'injecte bien continument dans $L^\infty(\mathbb{R})$.
c) On rappelle que pour tous $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ et $\xi \in \mathbb{R}$, $\widehat{fg}(\xi) = (\hat{f} \star \hat{g})(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi - \eta)\,\mathrm{d}\eta$, et on rappelle l'inégalité de Young suivante :

$$\forall \varphi \in L^1(\mathbb{R}), \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|\varphi \star \psi\|_{L^2} \leq \|\varphi\|_{L^1}\|\psi\|_{L^2}.$$

En admettant l'inégalité de Peetre (voir question 5),

$$\forall s \geq 0, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}, \quad (1 + |\xi|^2)^s \leq 4^s\big((1 + |\eta|^2)^s + (1 + |\xi - \eta|^2)^s\big),$$

montrer que pour tout $s > 1/2$, il existe une constante $C_s > 0$ telle que :

$$\forall f, g \in H^s(\mathbb{R}), \quad fg \in H^s(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|fg\|_{H^s} \leq C_s\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}.$$

Si $s > 1/2$ et $f, g \in H^s(\mathbb{R})$, on a en particulier $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, et on nous rappelle que la fonction (continue) $\widehat{fg}$ s'exprime comme la convolution $\hat{f} \star \hat{g}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)\,\mathrm{d}\eta \right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\leq 4^s \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} (1+|\eta|^2)^{s/2} \hat{f}(\eta)\hat{g}(\xi-\eta)\,\mathrm{d}\eta \right|^2 \mathrm{d}\xi \\
&\quad +4^s \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\eta)(1+|\xi-\eta|^2)^{s/2}\hat{g}(\xi-\eta)\,\mathrm{d}\eta \right|^2 \mathrm{d}\xi \quad \textit{(inégalité de Peetre)} \\
&= 4^s \|((1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{f}) \star \hat{g}\|_{L^2}^2 + 4^s \|\hat{f} \star ((1+|\cdot|^2)^{s/2}\hat{g})\|_{L^2}^2 \\
&\leq 4^s \|f\|_{H^s}^2 \|\hat{g}\|_{L^1}^2 + 4^s \|\hat{f}\|_{L^1}^2 \|g\|_{H^s}^2 \quad \textit{(inégalité de Young)} \\
&\leq C_s^2 \|f\|_{H^s}^2 \|g\|_{H^s}^2,
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité obtenue au b).

Pour ce qui suit, on se donne $s \geq 0$ et $\underline{u} \in H^s(\mathbb{R})$.

2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $V(t)\underline{u} := \mathcal{F}^{-1}\left(\xi \mapsto e^{it\xi^3}\widehat{\underline{u}}(\xi)\right)$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $V(t)\underline{u} \in H^s(\mathbb{R})$ et $\|V(t)\underline{u}\|_{H^s} = \|\underline{u}\|_{H^s}$.

Comme $e^{it\xi^3}$ est de module 1, $\xi \mapsto e^{it\xi^3}\widehat{\underline{u}}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})$, et $V(t)\underline{u}$ est bien défini dans $L^2(\mathbb{R})$. De plus,

$$\|V(t)\underline{u}\|_{H^s} = \|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\mathcal{F}(V(t)\underline{u})\|_{L^2} = \|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{\underline{u}}\|_{L^2} = \|\underline{u}\|_{H^s}.$$

b) Montrer que $t \mapsto V(t)\underline{u}$ est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $H^s(\mathbb{R})$.

Si $t, h \in \mathbb{R}$,

$$\|V(t+h)\underline{u} - V(t)\underline{u}\|_{H^s}^2 = \int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^s \left| e^{i(t+h)\xi^3} - e^{it\xi^3} \right|^2 |\widehat{\underline{u}}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.$$

Lorsque h tend vers 0, la quantité sous l'intégrale tend vers 0 ; de plus, elle est majorée par $4(1+|\xi|^2)^s|\widehat{\underline{u}}(\xi)|^2$, fonction (de ξ) intégrable. Par convergence dominée, lorsque h tend vers 0, l'intégrale tend vers 0.

c) Montrer que, si $s \geq 3$, $t \mapsto V(t)\underline{u}$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $H^{s-3}(\mathbb{R})$, et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(V(\cdot)\underline{u}\right)(t) = -\partial_x^3(V(t)\underline{u})$.

Lorsque $s \geq 3$, on a bien $\partial_x^3(V(t)\underline{u}) \in H^{s-3}(\mathbb{R})$. Avec $t \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^\star$,

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{h}(V(t+h)\underline{u} - V(t)\underline{u}) + \partial_x^3(V(t)\underline{u}) \right\|_{H^{s-3}}^2 = \\
&\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s-3} \frac{1}{h^2} \left| e^{i(t+h)\xi^3} - e^{it\xi^3} - ih\xi^3 e^{it\xi^3} \right|^2 |\widehat{\underline{u}}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi = \\
&\int_{\mathbb{R}} (1+|\xi|^2)^{s-3} \frac{1}{h^2} \left| e^{ih\xi^3} - 1 - ih\xi^3 \right|^2 |\widehat{\underline{u}}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Pour montrer que lorsque h tend vers 0, cette intégrale tend vers 0, on utilise à nouveau la convergence dominée, la domination provenant de

$$|e^{ih\xi^3} - 1 - ih\xi^3| = \left| i\xi^3 \int_0^h (e^{ik\xi^3} - 1)\,\mathrm{d}k \right| = |\xi|^3 \int_0^h |e^{ik\xi^3} - 1|\,\mathrm{d}k = 2|h||\xi|^3 \leq 2|h|(1+|\xi|^2)^{3/2}.$$

3) On suppose que $s \geq 3$. Montrer que si, pour un $T > 0$, $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,T], H^{s-3}(\mathbb{R}))$ est une solution forte de (1) (chaque terme de l'équation étant bien défini, à chaque instant $t \in [0,T]$, comme une fonction, modulo un ensemble de mesure nulle), avec $u(0) = \underline{u}$, alors elle vérifie

$$(2) \qquad \forall t \in [0,T], \quad u(t) = V(t)\underline{u} - \int_0^t V(t-t')(u(t')^3)\,\mathrm{d}t'$$

(on pourra montrer que la dérivée en temps de $v : t \mapsto V(-t)u(t)$ vaut $-V(-t)(u(t)^3)$).
Vérifions que pour tout $t \in [0,T]$, avec $h \neq 0$ tel que $t+h \in [0,T]$, la quantité $\Delta = \frac{1}{h}(V(-t-h)u(t+h) - V(-t)u(t)) + V(-t)(u(t)^3)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0. On évalue la norme $\|\cdot\|_{H^{s-3}}$ de Δ, qui est égale à celle de $V(t)\Delta$. On décompose alors

$$V(t)\Delta = V(-h)(\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t))) + \frac{1}{h}(V(-h)u(t) - u(t)) + u(t)^3.$$

Dans le deuxième terme, on reconnaît le taux d'accroissement utilisé en 2) c) ; il converge dans $H^{s-3}(\mathbb{R})$ vers $\partial_x^3 u(t)$. Le premier terme, lui, converge vers $\partial_t u(t)$:

$$\begin{aligned}
&\|V(-h)(\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t))) - \partial_t u(t)\|_{H^{s-3}} \\
&\leq \|V(-h)(\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) - \partial_t u(t))\|_{H^{s-3}} + \|V(-h)\partial_t u(t) - \partial_t u(t)\|_{H^{s-3}} \\
&= \|\frac{1}{h}(u(t+h) - u(t)) - \partial_t u(t)\|_{H^{s-3}} + \|V(-h)\partial_t u(t) - \partial_t u(t)\|_{H^{s-3}}.
\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 car $u \in \mathcal{C}^1([0,T], H^{s-3}(\mathbb{R}))$; le deuxième, par 2) b). Finalement, la norme $\|\cdot\|_{H^{s-3}}$ de Δ tend, lorsque h tend vers 0, vers

$$\|\partial_t u(t) + \partial_x^3 u(t) + u(t)^3\|_{H^{s-3}} = 0.$$

En intégrant la relation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(V(-\cdot)u) = V(-\cdot)(u^3)$, on a

$$\forall t \in [0,T], \quad V(-t)u(t) = \underline{u} + \int_0^t V(-t')(u(t')^3)\,\mathrm{d}t',$$

et on conclut en appliquant $V(t)$.
4) Lorsque $s > 1/2$ et $T > 0$, on dit que $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}))$ est solution *intégrale* de (1) avec donnée initiale $\underline{u}$ si elle vérifie (2). Montrer l'unicité d'une telle solution (si u_1 et u_2 sont deux telles solutions, on pourra noter qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in [-T,T]$, $\|u_1(t)\|_{H^s} + \|u_2(t)\|_{H^s} \leq R$, et que $v := u_2 - u_1$ vérifie $\|v(t)\|_{H^s} \leq \widetilde{C_s} R^2 \int_0^t \|v(t')\|_{H^s}\,\mathrm{d}t'$, avec une constante $\widetilde{C_s}$ liée à celle, C_s, donnée en 1) c)).
Si $u_1, u_2 \in \mathcal{C}([-T,T], H^s(\mathbb{R}))$ sont des solutions intégrales de (1), par leur continuité en temps et par compacité de $[0,T]$, il existe $R > 0$ tel que pour tout $t \in [-T,T]$, $\|u_1(t)\|_{H^s} + \|u_2(t)\|_{H^s} \leq R$. Si de plus elles ont la même donnée initiale, leur différence $v := u_2 - u_1$ vérifie, pour tout $t \in [0,T]$:

$$\|v(t)\|_{H^s} = \left\| \int_0^t V(t-t')(u_2(t')^3 - u_1(t')^3)\,\mathrm{d}t' \right\|_{H^s} \leq \int_0^t \|u_2(t')^3 - u_1(t')^3\|_{H^s} \mathrm{d}t',$$

et par 1)c),

$$\|u_2(t')^3 - u_1(t')^3\|_{H^s} = \|(u_2(t') - u_1(t'))(u_2(t')^2 + u_2(t')u_1(t') + u_1(t'))\|_{H^s} \leq C_s^2 R^2 \|v(t')\|_{H^s},$$

car (en omettant t')

$$\|u_2^2 + u_2 u_1 + u_1^2\|_{H^s} \leq \|u_2^2\|_{H^s} + \|u_2 u_1\|_{H^s} + \|u_1^2\|_{H^s} \leq C_s(\|u_2\|_{H^s}^2 + \|u_2\|_{H^s}\|u_1\|_{H^s} + \|u_1\|_{H^s}^2).$$

Ainsi, $\|v(t)\|_{H^s} \leq C_s^2 R^2 \int_0^t \|v(t')\|_{H^s}\,\mathrm{d}t'$, et le lemme de Gronwall conclut.
5) Soit $s > 1/2$. Montrer (par exemple, par une méthode de point fixe) qu'il existe $T > 0$ et $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}))$, solution intégrale de (1) avec donnée initiale $\underline{u}$.
On va montrer qu'il existe une solution de (2), sous forme d'un point fixe de $\mathcal{T} : u \mapsto (t \mapsto V(t)\underline{u} + \int_0^t V(t-t')(u(t')^2)\,\mathrm{d}t')$, dans la boule B de $\mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R}))$ (muni de $\|u\| :=$

$\sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{H^s}$, *c'est un espace de Banach) centrée à l'origine, fermée et de rayon* $2\|\underline{u}\|_{H^s}$*, lorsque* $T > 0$ *est assez petit.*

La boule B *est invariante par* $\mathcal{T}$*, car si* $u \in B$, $\|\mathcal{T}u\| \leq \|\underline{u}\|_{H^s} + C_s^2 T \|\underline{u}\|_{H^s}^3$ *: on choisit* $T \leq (C_s\|\underline{u}\|_{H^s})^{-2}$.

L'application $\mathcal{T}$ *est contractante sur* B*, car si* $u, v \in B$, $\|\mathcal{T}v - \mathcal{T}u\| \leq (2C_s\|\underline{u}\|_{H^s})^2 T \|v-u\|$*, et on choisit* $T < (2C_s\|\underline{u}\|_{H^s})^{-2}$.

6) On suppose que $s \geq 3$, et que $u \in \mathcal{C}([0,T], H^s(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,T], H^{s-3}(\mathbb{R}))$ est une solution forte de (1).

a) De quelle équation la conjuguée $\bar{u}$ est-elle solution (forte) ? Montrer que si $\underline{u}$ est à valeurs réelles, alors u aussi.

La conjuguée $\bar{u}$ *est solution de la même équation que* u *:*

$$\forall t \in [0,T], \quad \partial_t \bar{u}(t) + \partial_x^3 \bar{u}(t) = -\bar{u}^3,$$

la conjugaison complexe commutant avec la dérivation "classique" (en temps) et avec la dérivation faible (en espace). Lorsque $\underline{u}$ *est à valeurs réelles,* u *et* $\bar{u}$ *sont donc solutions intégrales (par 3)) pour la même équation, avec la même donnée initiale. Par l'unicité du 4), elles coïncident.*

b) On suppose que $\underline{u}$ est à valeurs réelles. Montrer que $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}$ est une fonction décroissante.

On procède par estimation d'énergie : $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}^2$ *est une application de classe* $\mathcal{C}^1$*, dont la dérivée vaut*

$$2(u \mid \partial_t u(t))_{L^2} = -2(u \mid \partial_x^3 u(t))_{L^2} - 2\int_{\mathbb{R}} u(t,x)^4 \mathrm{d}x.$$

Le premier terme du membre de droite est nul (utilisant Parseval, on voit qu'il est égal à son opposé). Donc la dérivée de $\|u(t)\|_{L^2}^2$ *est négative...*

7) Démontrer l'inégalité de Peetre donnée à la question 1 (on pourra commencer par noter que pour tous $a, b, s \geq 0$, $(a+b)^s \leq 2^s(a^s + b^s)$, par exemple grâce au fait que $a + b \leq 2\max(a,b)$).

Si $a, b, s \geq 0$*, on a* $a + b \leq 2\max(a,b)$*, donc* $(a+b)^s \leq 2^s \max(a,b)^s \leq 2^s(a^s + b^s)$*. Alors, si* $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ *(ou* $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$*,* $d \in \mathbb{N}^\star$*) :*

$$1 + |\xi|^2 = 1 + |\xi-\eta|^2 + |\eta|^2 + 2(\xi-\eta)\cdot\eta \leq 1 + 2(|\xi-\eta|^2 + |\eta|^2) \leq 2((1+|\xi-\eta|^2) + (1+|\eta|^2)),$$

et on applique ce qui précède avec $a = 1 + |\xi-\eta|^2$*,* $b = 1 + |\eta|^2$ *: ainsi,*

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 2^s((1+|\xi-\eta|^2) + (1+|\eta|^2))^s \leq 4^s((1+|\xi-\eta|^2)^s + (1+|\eta|^2)^s).$$