Master de Mathématiques **Examen, session 2** **(3 heures)** Université J. Fourier
MAT4117 – EDO et EDP **Éléments de correction** 2014-2015

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 1. Méthode des caractéristiques.
Soit $T_-, T_+ > 0$, $d \in \mathbb{N}^\star$ et $v :]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ de classe $\mathcal{C}^1$. Le but de cet exercice est de donner une solution classique $u :]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ au problème de transport

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + v(t,x)\cdot\partial_x u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d, \\ u_{|t=0} = \underline{u}, \end{cases} \tag{1}$$

lorsqu'on a une donnée initiale $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On fera l'hypothèse suivante sur le champ de vecteurs v : il existe une constante $C_v > 0$ telle que

$$\forall (t,x) \in]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d, \quad |v(t,x)| \le C_v(1+|x|). \tag{2}$$

Étant donnés $t \in]-T_-, T_+[$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on notera $\gamma_{t,x}$ la courbe intégrale de v passant par x à l'instant t, c'est-à-dire la solution du système différentiel avec donnée initiale

$$\begin{cases} {\gamma_{t,x}}'(s) = v(s, \gamma_{t,x}(s)), \\ \gamma_{t,x}(t) = x. \end{cases} \tag{3}$$

1) Justifier qu'il existe $\tau > 0$ et une unique solution $\gamma_{t,x} \in \mathcal{C}^1([t-\tau, t+\tau]\cap]-T_-, T_+[, \mathbb{R}^d)$ de (3). *Il suffit de remarquer que, la fonction v étant de classe $\mathcal{C}^1$, elle est localement lipschitzienne par rapport à son deuxième argument, et le théorème de Cauchy-Lipschitz permet de conclure.*

2) Démontrer le lemme de Gronwall suivant :
Étant donnés $t \in]-T_-, T_+[$, $\varphi \in \mathcal{C}(]-T_-, T_+[, \mathbb{R}_+)$ et $C_1, C_2 > 0$ tels que

$$\forall s \in]-T_-, T_+[, \quad \varphi(s) \le C_1 + C_2 \left| \int_t^s \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \right|,$$

on a

$$\forall s \in]-T_-, T_+[, \quad \varphi(s) \le C_1 e^{C_2|s-t|}$$

(on pourra se contenter de montrer cette assertion pour $s \ge t$, le cas $s \le t$ s'en déduisant par symétrie). *On dérive la fonction $s \mapsto \psi(s) = \int_t^s \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ définie pour $s \ge t$: $\psi'(s) = \varphi(s) \le C_1 + C_2\psi(s)$, si bien que la dérivée de $s \mapsto \psi(s)\exp(-C_2 s)$ est majorée par $C_1 \exp(-C_2 s)$, d'où par intégration, $\psi(s) \le C_1\big(exp(C_2(s-t)) - 1\big)/C_2$, qui donne le résultat grâce au fait que $\varphi(s) \le C_1 + C_2\psi(s)$.*

3) Montrer que la solution maximale de (3), encore notée $\gamma_{t,x}$, est globale, c'est-à-dire qu'elle est définie sur tout $]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d$.
Pour cela, on pose $\varphi(s) := |\gamma_{t,x}(s)|$. La formulation intégrale de (3) s'écrit alors $\varphi(s) = x + \int_t^s v(\tau, \varphi(\tau))\,\mathrm{d}\tau$, donc pour tout $s \in]-T_-, T_+[$, $\varphi(s) \le |x| + C_v(T_+ + T_-) + C_v \left|\int_t^s \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|$. Alors, avec $R = |x| + C_v(T_+ + T_-)\exp(C_v(T_+ + T_-))$, la question précédente montre que $\gamma_{t,x}(s)$ reste dans la boule $\overline{B}(0,R)$, qui est un compact de $\mathbb{R}^d$. Il n'y a donc pas explosion en temps fini, et $\gamma_{t,x}$ est une solution globale de (3).

Dans ce qui suit, on écrira $X(s,t,x)$ pour $\gamma_{t,x}(s)$, et on admettra que X est une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $]-T_-, T_+[\times]-T_-, T_+[\times\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$.

4) Montrer que

$$(4) \qquad \forall t_1, t_2, t_3 \in]-T_-, T_+[, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) = X(t_3, t_1, x).$$

Cela est dû à l'unicité de la solution de (3)*, et au fait que sa solution soit globale. En effet,* $X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x))$ *est l'extrémité à* $s = t_3$ *d'une trajectoire de l'ED0* $\gamma'(s) = v(s, \gamma(s))$ *partant à* $s = t_2$ *de la position* $X(t_2, t_1, x)$*, alors que* $X(t_3, t_1, x)$ *est est l'extrémité à* $s = t_3$ *d'une trajectoire de la même ED0 partant à* $s = t_1$ *de la position* x*. Cette seconde trajectoire passe donc à* $s = t_2$ *par* $X(t_2, t_1, x)$*, et à* $s = t_3$*, par* $X(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x))$ *; cette position finale coïncide donc avec* $X(t_3, t_1, x)$*.*
On en déduit que pour tous $s, t \in]-T_-, T_+[$*,* $X(t, s, X(s, t, x)) = X(t, t, x) = x$*. Ainsi,* $X(s, t, \cdot)$ *est une bijection de* $\mathbb{R}^d$ *sur lui-même, d'inverse* $X(t, s, \cdot)$*.*

5) a) En dérivant la relation (4) par rapport à t_2 et en choisissant convenablement t_1, t_2 et t_3, montrer que

$$\forall t \in]-T_-, T_+[, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (\partial_t X)(0, t, x) + v(t, x) \cdot (\partial_x X)(0, t, x) = 0.$$

En dérivant (4) *par rapport à* t_2*, on obtient*

$$(\partial_t X)(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) + (\partial_x X)(t_3, t_2, X(t_2, t_1, x)) \cdot (\partial_s X)(t_2, t_1, x) = 0.$$

Avec $t_1 = t_2 = t$*,* $t_3 = 0$*, on déduit la relation demandée, en utilisant le fait que* $(\partial_s X)(s, t, x) = v(s, X(s, t, x))$*.*

b) En déduire que, si $\underline{u} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, alors $u : (t, x) \mapsto \underline{u}(X(0, t, x))$ est une solution classique (de classe $\mathcal{C}^1$) de (1).

En effet, cette application est bien de classe $\mathcal{C}^1$*, et on a*

$$\partial_t\big(\underline{u}(X(0, t, x))\big) = (\partial_x \underline{u})(X(0, t, x)) \cdot (\partial_t X)(0, t, x)$$

et

$$\partial_{x_j}\big(\underline{u}(X(0, t, x))\big) = (\partial_x \underline{u})(X(0, t, x)) \cdot (\partial_{x_j} X)(0, t, x),$$

si bien que

$$(\partial_t + v(t, x) \cdot \partial_x)\big(\underline{u}(X(0, t, x))\big) = \big((\partial_t X)(0, t, x) + v(t, x) \cdot (\partial_x X)(0, t, x)\big) \cdot (\partial_x \underline{u})(X(0, t, x)) = 0.$$