Master de Mathématiques
MAT4117 – EDO et EDP

Université J. Fourier
2014-2015

Examen, session 1 : éléments de correction

Exercice 1.
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, telle que $f(0) = f(1) = 0$, et pour tout $y \in]0,1[$, $f(y) < 0$. On se donne $\underline{x} \in]0,1[$, et on considère le système ("équation différentielle et condition initiale")

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = \underline{x}. \end{cases}$$

1) Pour justifier qu'il existe une unique solution maximale $x \in \mathcal{C}^1(]-T_{\min}, T_{\max}[, \mathbb{R})$ à (1), avec $T_{\min}, T_{\max} \in]0,\infty]$, on invoque le théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour cela, il suffit de noter que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, donc localement lipschitzienne.

2) Vérifions que pour tout $t \in]-T_{\min}, T_{\max}[$, $x(t) \in]0,1[$. En effet, $\underline{x} \in]0,1[$, donc s'il existait $t_1 \in]-T_{\min}, T_{\max}[$ tel que $x(t_1) \notin]0,1[$, il existerait $t_2 \in]-T_{\min}, T_{\max}[$ tel que $x(t_2) \in \{0,1\}$. On aurait alors $f(x(t_2)) = 0$, si bien que la fonction constante $\tilde{x} :]-T_{\min}, T_{\max}[\to \mathbb{R}$ valant $x(t_2)$ serait solution de

$$\begin{cases} y' = f(y), \\ y(t_2) = x(t_2). \end{cases}$$

Mais x aussi. Par unicité locale, x et $\tilde{x}$ devraient coïncider, si bien qu'on aurait $]0,1[\ni \underline{x} = x(0) = \tilde{x}(0) = x(t_2) \notin]0,1[$, ce qui est absurde.
Ainsi, x est à valeurs dans le compact $[0,1]$. Par le critère d'explosion, cette solution maximale doit être globale : $T_{\min} = T_{\max} = \infty$.

3) Comme x est à valeurs dans $]0,1[$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $x'(t) = f(x(t)) < 0$, donc x est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Comme elle est minorée par 0, elle admet une limite $\ell \geq 0$ en $+\infty$. De plus, par continuité de f, $x'(t) = f(x(t))$ tend vers $f(\ell)$ quand t tend vers $+\infty$. Si ℓ était strictement positif, on aurait $f(\ell) < 0$, et x tendrait vers $-\infty$ en $+\infty$.

4) On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$, et que $f'(0) = -\alpha$, pour un $\alpha > 0$.
Ainsi, il existe $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(y) = -\alpha y + g(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et $g(0) = g'(0) = 0$.
Pour tous $t, \beta \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi_\beta(t) = x(t)\, e^{\beta t}$.

a) Soit $\beta \in]0,\alpha[$. Comme produit de telles fonctions, φ_β est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi_\beta'(t) &= \big(x'(t) + \beta x(t)\big) e^{\beta t} \\ &= \big(f(x(t)) + \beta x(t)\big) e^{\beta t} \\ &= x(t) \left(-(\alpha - \beta) + \frac{g(x(t))}{x(t)} \right) e^{\beta t}. \end{aligned}$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, $x(t)$ tend vers 0, et comme $g'(0) = 0$, $g(x(t))/x(t)$ tend aussi vers 0. On en déduit qu'à partir d'un certain rang, φ_β' est négative, et donc φ_β est décroissante.

Mais elle est minorée (positive), donc elle est bornée sur $[0,+\infty[$: il existe $c_\beta > 0$ telle que pour tout $t \geq 0$, $x(t) \leq c_\beta e^{-\beta t}$.

b) Pour justifier qu'il existe $C_g > 0$ telle que pour tout $y \in]0,1[$, $|g(y)| \leq C_g\, y^2$, on écrit une formule de Taylor pour g : pour tout $y \in]0,1]$,

$$g(y) = g(0) + g'(0)\,y + \int_0^y (y-z)\,g''(z)\,\mathrm{d}z \leq \big(\sup_{[0,1]}(|g''|)\big) \int_0^y (y-z)\,\mathrm{d}z = \frac{y^2}{2} \sup_{[0,1]}(|g''|).$$

c) Soit $s, t \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
|\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(s)| &= \left| \int_s^t \varphi_\alpha'(r)\,\mathrm{d}r \right| \\
&= \left| \int_s^t g(x(r)) e^{\alpha r}\,\mathrm{d}r \right| \\
&\leq \left| \int_s^t C_g x(t)^2 e^{\alpha r}\,\mathrm{d}r \right| \qquad \text{par b)} \\
&\leq \left| \int_s^t C_g c_\beta^2 e^{(\alpha - 2\beta) r}\,\mathrm{d}r \right| \qquad \text{pour tout } \beta \in]0,\alpha[, \text{ par a)}.
\end{aligned}$$

On choisit $\beta \in]\alpha/2, \alpha[$, si bien que, pout tout $T > 0$, si $s, t \geq T$, la dernière quantité est inférieure ou égale à $\displaystyle\int_T^\infty C_g c_\beta^2 e^{(\alpha-2\beta)r}\,\mathrm{d}r = \frac{C_g c_\beta^2}{2\beta - \alpha} e^{-(2\beta-\alpha)T}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc $T > 0$ tel que pour tous $s, t \geq T$, on ait $|\varphi_\alpha(t) - \varphi_\alpha(s)| \leq \varepsilon$.
Par ce critère de Cauchy, on déduit que $\varphi_\alpha(t)$ a une limite $\gamma \in \mathbb{R}$ lorsque t tend vers $+\infty$ (et $\gamma \geq 0$ comme φ_α).

d) Pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
x'(t) &= f(x(t)) \\
&= -\alpha x(t) + g(x(t)) \\
&\geq -\alpha x(t) - C_g x(t)^2 \qquad \text{par b)}.
\end{aligned}$$

Comme $\alpha x(t) + C_g x(t)^2 > 0$, on obtient $\dfrac{x'(t)}{\alpha x(t) + C_g\, x(t)^2} \geq -1$, et grâce à la décomposition en éléments simples $\dfrac{1}{\alpha X + C_g X^2} = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{X + \alpha/C_g}\right)$, on a après intégration :

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{x(t)}{x(t) + \alpha/C_g} \geq \frac{\underline{x}}{\underline{x} + \alpha/C_g} e^{-\alpha t},$$

si bien que

$$\forall t \geq 0, \quad \varphi_\alpha(t) \geq \frac{\underline{x}}{\underline{x} + \alpha/C_g}(x(t) + \alpha/C_g) \geq \frac{\alpha \underline{x}}{C_g \underline{x} + \alpha},$$

donc $\gamma \geq \dfrac{\alpha \underline{x}}{C_g \underline{x} + \alpha} > 0$. On en conclut que $x(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \gamma e^{-\alpha t}$.

Exercice 2.
Dans cet exercice, l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^d)$ et l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{R}^d)$ désignent des espaces de (classes de) fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $\underline{u} \in H^2(\mathbb{R}^d)$. On considère le problème de Cauchy suivant (associé à une équation de Schrödinger, avec $\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2$) :

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - i\varepsilon\Delta u_\varepsilon = 0, \quad (t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d), \\ u_{\varepsilon|_{t=0}} = \underline{u}. \end{cases} \tag{2}$$

1) Avec $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier sur $L^2(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u_\varepsilon(t) = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-i\varepsilon t|\cdot|^2}\widehat{\underline{u}}\right). \tag{3}$$

a) Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|e^{-i\varepsilon t|\cdot|^2}\widehat{\underline{u}}\right| = |\widehat{\underline{u}}| \in L^2(\mathbb{R}^d)$, donc $u_\varepsilon(t)$ est bien défini comme élément de $L^2(\mathbb{R}^d)$, et $(1+|\cdot|^2)\left|\widehat{u_\varepsilon(t)}\right| = (1+|\cdot|^2)|\widehat{\underline{u}}| \in L^2(\mathbb{R}^d)$, donc u_ε appartient à $H^2(\mathbb{R}^d)$ (et Δu_ε existe – dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ – au sens des dérivées faibles, et vaut $\mathcal{F}^{-1}\left(-|\cdot|^2\widehat{u_\varepsilon}\right)$).
De plus, si $s, t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t) - u_\varepsilon(s)\|_{H^2}^2 &= \|(1+|\cdot|^2)\left(e^{-i\varepsilon t|\cdot|^2}\widehat{\underline{u}} - e^{-i\varepsilon s|\cdot|^2}\widehat{\underline{u}}\right)\|_{L^2}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^d}(1+|\xi|^2)^2\left|e^{-i\varepsilon t|\xi|^2} - e^{-i\varepsilon s|\xi|^2}\right|^2|\widehat{\underline{u}}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

À ξ fixé, la quantité sous l'intégrale tend vers 0 lorsque s tend vers t ; de plus, elle est majorée par $4(1+|\xi|^2)^2|\widehat{\underline{u}}(\xi)|^2$, qui est une fonction de ξ intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Par convergence dominée, on déduit que si s tend vers t, $u_\varepsilon(s)$ tend vers $u_\varepsilon(t)$ dans $H^2(\mathbb{R}^d)$. On a donc $u_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^d))$.
b) Comme $H^2(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continument dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on a en particulier $u_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$. De plus, si $t \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^\star$,

$$\left\|\frac{1}{h}(u_\varepsilon(t+h) - u_\varepsilon(t)) - i\varepsilon\Delta u_\varepsilon(t)\right\|_{L^2}^2 = (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{h}\left(e^{-i\varepsilon h|\xi|^2} - 1\right) + i\varepsilon|\xi|^2\right|^2|\widehat{\underline{u}}(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

De même qu'au-dessus, lorsque h tend vers zéro, cette intégrale tend vers zéro par convergence dominée (grâce au fait que le module au carré est majoré par $(2\varepsilon|\xi|^2)^2$).
Ainsi, comme application de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, u_ε est dérivable, de dérivée $\partial_t u_\varepsilon = i\varepsilon\Delta u_\varepsilon$. Cela prouve que u_ε est solution de (2) au sens faible. Enfin, comme $u_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^d))$, on a $\Delta u_\varepsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$, et donc $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$.

2) Pour montrer qu'il y a unicité de la solution de (2) dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, H^2(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^d))$, on considère deux solutions u_ε et $\widetilde{u_\varepsilon}$ de ce problème de Cauchy (avec la même donnée initiale). La différence $v_\varepsilon := u_\varepsilon - \widetilde{u_\varepsilon}$ est alors dans le même espace et vérifie

$$\begin{cases} \partial_t v_\varepsilon - i\varepsilon\Delta v_\varepsilon = 0, \quad (t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^d), \\ v_{\varepsilon|_{t=0}} = 0. \end{cases}$$

L'application $t \mapsto \|v_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et on procède par estimation d'énergie :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|v_\varepsilon\|_{L^2}^2\right)(t) = 2\mathrm{Re}(v_\varepsilon(t) \mid \partial_t v_\varepsilon(t))_{L^2} = 2\mathrm{Re}\left[i(v_\varepsilon(t) \mid \Delta v_\varepsilon(t))_{L^2}\right] = 0,$$

car

$$(v_\varepsilon(t) \mid \Delta v_\varepsilon(t))_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^d} v_\varepsilon(t)\overline{\Delta v_\varepsilon(t)}\mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla v_\varepsilon(t)|^2\mathrm{d}x \in \mathbb{R}.$$

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\|v_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 = \|v_\varepsilon(0)\|_{L^2}^2 = 0$, et $v_\varepsilon(t) = 0$.

3) On considère à présent $k \in \mathbb{R}^d$, $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et une donnée initiale $\underline{u}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \underline{u}(x) = a(x)\, e^{i(k\cdot x)/\varepsilon}. \tag{4}$$

a) Justifions qu'on a $\underline{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Tout d'abord, comme a et $x \mapsto \exp(i(k\cdot x)/\varepsilon)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, leur produit $\underline{u}$ aussi. Ensuite, si $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$, par la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |x^\alpha \partial_x^\beta \underline{u}(x)| &= \left| x^\alpha \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_x^\gamma a(x)\, \partial_y^{\beta-\gamma}(y \mapsto \exp(i(k\cdot y)/\varepsilon))(x) \right| \\ &= \left| x^\alpha \sum_{\gamma\leq\beta} \binom{\beta}{\gamma} \partial_x^\gamma a(x) \left(\frac{i}{\varepsilon}k\right)^{\beta-\gamma} e^{i(k\cdot x)/\varepsilon} \right| \\ &\leq C \sum_{\gamma\leq\beta} \|x^\alpha \partial_x^\gamma a\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

avec une constante C dépendant de β, k et ε. Le majorant obtenu est fini, puisque $a \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

b) On peut alors donner une expression de u_ε, donnée par (3), en utilisant la transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz : si $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^d$,

$$u_\varepsilon(t,x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-i\varepsilon t|\xi|^2} \widehat{\underline{u}}(\xi)\, \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot\xi} e^{-i\varepsilon t|\xi|^2} \widehat{a}(\xi - k/\varepsilon)\, \mathrm{d}\xi.$$

Par le changement de variable $\eta = \xi - k/\varepsilon$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad u_\varepsilon(t,x) = (2\pi)^{-d} e^{i(k\cdot x - t|k|^2)/\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-2tk)\cdot\eta} e^{-i\varepsilon t|\eta|^2} \widehat{a}(\eta)\, \mathrm{d}\eta.$$

c) Par (3), on a $\widehat{u_\varepsilon}(t,\xi) = e^{-it\varepsilon|\xi|^2} \widehat{a}(\xi - k/\varepsilon)$. Si, pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^d$, on pose $v_\varepsilon(t,x) = a(x - 2tk)\, e^{i(k\cdot x - t|k|^2)/\varepsilon}$, on a comme ci-dessus $v_\varepsilon(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et pour tous $t \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \widehat{v_\varepsilon}(t,\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot\xi} a(x-2tk) e^{i(k\cdot x - t|k|^2)/\varepsilon}\, \mathrm{d}x \\ &= e^{-2itk\cdot\xi + it|k|^2/\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot(\xi - k/\varepsilon)} a(y)\, \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

par le changement de variable $y = x - 2tk$. La dernière intégrale vaut $\widehat{a}(\xi - k/\varepsilon)$, si bien que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|\widehat{u_\varepsilon}(t) - \widehat{v_\varepsilon}(t)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{i\phi} - 1 \right|^2 |\widehat{a}(\xi - k/\varepsilon)|^2 \mathrm{d}\xi,$$

où la quantité ϕ vaut $\phi = \varepsilon t|\xi|^2 - 2tk\cdot\xi + t|k|^2/\varepsilon = \varepsilon t|\xi - k/\varepsilon|^2$. En changeant de variable, on a

$$\|\widehat{u_\varepsilon}(t) - \widehat{v_\varepsilon}(t)\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{i\varepsilon t|\eta|^2} - 1 \right|^2 |\widehat{a}(\eta)|^2 \mathrm{d}\eta,$$

qui tend vers zéro lorsque ε tend vers zéro, par convergence dominée.

Exercice 3.

On considère Ω, un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, ainsi que $b \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$, et on définit l'opérateur différentiel (elliptique) L par

$$Lu = -\Delta u + b\cdot\nabla u = -\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 u + \sum_{j=1}^d b_j \partial_{x_j} u.$$

Le but de cet exercice est de montrer le *principe du maximum faible* :
si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ *vérifie* $Lu \leq 0$ *sur* Ω*, alors le maximum de* u *sur* $\overline{\Omega}$ *(noté* $\max_{\overline{\Omega}} u$*) est en fait atteint sur le bord* $\partial\Omega$ *(donc* $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$*).*

On se donne donc $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continue, et de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω.

1) On suppose tout d'abord que Lu est strictement négatif sur Ω, et que $\max_{\overline{\Omega}} u = u(\underline{x})$ pour un certain $\underline{x} \in \Omega$. On rappelle qu'on a alors $\nabla u(\underline{x}) = 0$, et que la matrice hessienne de u en $\underline{x}$, $\mathrm{Hess}(u)(\underline{x}) = (\partial_{x_i}\partial_{x_j} u(\underline{x}))_{1 \leq i,j \leq d}$, est une matrice symétrique négative.

a) Le fait que $\mathrm{Hess}(u)(\underline{x})$ soit une matrice symétrique négative signifie (qu'elle est symétrique et) que pour tout $v \in \mathbb{R}^d$, ${}^t v \mathrm{Hess}(u)(\underline{x}) v \leq 0$. En choisissant pour v le j-ème élément de la base canonique, on obtient $\partial^2_{x_j} u(\underline{x}) \leq 0$.

b) Dans ce cas, puisque $\nabla u(\underline{x}) = 0$, on aurait une valeur strictement négative pour $Lu(\underline{x}) = -\sum_{j=1}^d \partial^2_{x_j} u(\underline{x}) \geq 0$, ce qui est contradictoire.

2) On suppose à présent que $Lu \leq 0$ sur Ω. Pour tous $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\forall x \in \overline{\Omega}, \quad u_n(x) = u(x) + \frac{1}{n} e^{\lambda x_1}.$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \Omega$:

$$Lu_n(x) = Lu(x) + \frac{1}{n}(b_1 - \lambda)\lambda\, e^{\lambda x_1} \leq \frac{1}{n}(b_1 - \lambda)\lambda\, e^{\lambda x_1},$$

strictement négatif dès que $\lambda > \|b_1\|_{L^\infty}$.
Pour ce qui suit, on fixe un tel λ, et on sait par ce qui précède que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $x^{(n)} \in \partial\Omega$ tel que $\max_{\partial\Omega} u_n = u_n(x^{(n)})$.

b) La suite $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^\star}$ est une suite d'éléments du compact $\partial\Omega$; elle admet donc une sous-suite, encore notée $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}^\star}$, qui converge vers un certain $\underline{x} \in \partial\Omega$.
De plus, $\overline{\Omega}$ étant borné, l'ensemble $\{|x_1|, x \in \overline{\Omega}\}$ est majoré, disons par R. Mais alors, si $x \in \overline{\Omega}$, $|(u - u_n)(x)| = \frac{1}{n} e^{\lambda x_1} \leq \frac{1}{n} e^{\lambda R}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, uniformément en x.

c) Par les deux convergences précédentes, on déduit que lorsque n tend vers l'infini, $u_n(x^{(n)})$ tend vers $u(\underline{x})$, et pour tout $x \in \overline{\Omega}$, $u_n(x)$ tend vers $u(x)$. On peut alors passer à la limite dans l'inégalité $u_n(x^{(n)}) \geq u_n(x)$, et en déduire que $\underline{x}$ est un lieu de maximum de u : le maximum de u est bien réalisé au bord de Ω.