Contrôle continu 1

Mardi 4 novembre 2014, durée : 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barême approximatif : autour du cours sur 2 points ; exercice 1 sur 12 points ; exercice 2 sur 8 points.

Sur un espace vectoriel de dimension finie, on note $|\cdot|$ toute norme considérée.

Autour du cours.
1) Lorsque $u' = f(u)$ est une EDO sur un espace de Banach E, et u_{eq} un équilibre pour cette EDO, donner la définition de la stabilité de cet équilibre.

2) Soit $a \geq 0$ et $b > 0$. Montrer que, lorsque $\phi \in \mathcal{C}([0,T], \mathbb{R}_+)$,

$$\left(\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq a + b\int_0^t \phi(t')\,\mathrm{d}\,t'\right) \Longrightarrow \left(\forall t \in [0,T], \quad \phi(t) \leq ae^{bt}\right).$$

Exercice 1. Le but de cet exercice est d'étudier le système "proies-prédateurs"

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = ax - bxy, \\ y' = -cy + dxy, \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des constantes strictement positives.

1) Montrer que le système (1) est de la forme $u' = f(u)$, avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lipschitzienne sur les bornés de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire (avec $|\cdot|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$) :

$$\forall M > 0, \exists L > 0, \forall u, v \in \mathbb{R}^2, \ (|u| \leq M, |v| \leq M \Rightarrow |f(u) - f(v)| \leq L|u - v|).$$

On en déduit que pour tout $\underline{u} = (\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution maximale $u = (x,y) \in \mathcal{C}^1(]-T_{\min}, T_{\max}[, \mathbb{R}^2)$ de (1) avec condition initiale $u(0) = \underline{u}$. De plus, si $T_{\max} < +\infty$, alors $|u(t)| \underset{t \to T_{\max}}{\longrightarrow} +\infty$ (de même si $T_{\min} < +\infty$).

2) Montrer que les points d'équilibre de (1) sont $(0,0)$ et $u_{\text{eq}} = (c/d, a/b)$. Calculer les matrices $f'(0)$ et $f'(u_{\text{eq}})$ du linéarisé en ces points, ainsi que leurs valeurs propres. Peut-on en déduire quelque chose sur la stabilité ou la stabilité asymptotique de ces équilibres ? (pour $(0,0)$, on pourra utiliser le résultat de l'exercice 2).

3) Montrer que si $\underline{x} = 0$, alors la solution maximale associée (qu'on pourra calculer explicitement) est globale, et vérifie $x(t) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\underline{x} > 0$, alors pour la solution maximale associée, on a $x(t) > 0$, pour tout $t \in]-T_{\min}, T_{\max}[$.

Dans la suite, on se donne $\underline{x}$ et $\underline{y}$ strictement positifs. Pour la solution maximale associée $u = (x,y) \in \mathcal{C}^1(]-T_{\min}, T_{\max}[, \mathbb{R}^2)$, on admettra qu'on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$, pour tout $t \in]-T_{\min}, T_{\max}[$. Pour tous $x, y > 0$, on pose

$$H(x,y) = dx - c\ln(x) + by - a\ln(y).$$

4) a) Montrer que pour tout $t \in]-T_{\min}, T_{\max}[, \quad H(x(t), y(t)) = H(\underline{x}, \underline{y})$.
b) En déduire que la trajectoire $(u(t))_{t \in]-T_{\min}, T_{\max}[}$ est bornée, puis que la solution u est globale.

5) Dans le quart de plan $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$, on définit

$$\mathrm{SW} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < c/d, 0 < y < a/b\}, \quad \mathrm{SE} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x, 0 < y < a/b\},$$
$$\mathrm{NE} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c/d < x, a/b < y\}, \quad \mathrm{NW} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < c/d, a/b < y\}.$$

a) Noter que si $u(t) \in$SW, alors $x'(t) > 0$ et $y'(t) < 0$. Montrer que si $\underline{u} \in$SW, alors il existe $t_1 > 0$ tel que pour tout $t \in [0, t_1[$, $u(t) \in$SW, et $x(t_1) = c/d$, $0 < y(t_1) < a/b$. Justifier que pour $t > t_1$, avec $t - t_1$ petit, on a $u(t) \in$SE.
On admettra que $u(t)$ "passe" alors successivement par SW, SE, NE et NW avant de revenir dans SW, et qu'il y a ainsi un premier temps $t_1' > t_1$ pour lequel $x(t_1') = c/d$ et $0 < y(t_1') < a/b$.

b) Montrer que $y(t_1') = y(t_1)$ (on pourra utiliser la fonction H). En déduire que la trajectoire $(u(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est périodique.

c) Grâce à ce résultat, retrouver le fait que l'origine est un équilibre instable (la stabilité de u_{eq}, elle, peut être obtenue grâce à la fonction de Lyapunov H).

Exercice 2. Le but de cet exercice est de montrer que, pour une EDO autonome $u' = f(u)$ sur un espace vectoriel E de dimension finie, lorsque u_{eq} est un équilibre tel que la matrice $f'(u_{\mathrm{eq}})$ admette une valeur propre de partie réelle strictement positive, l'équilibre est instable.
Pour simplifier, on supposera que $E = \mathbb{R}^d$, que f est définie (et de classe $\mathcal{C}^2$) sur tout E, que $u_{\mathrm{eq}} = 0$ – et donc $f(0) = 0$ – , et qu'il existe une décomposition de E comme somme de sous-espaces vectoriels stables par la matrice $M = f'(0)$, $E = E_1 \oplus E_2$, ainsi qu'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$ sur E et un $a > 0$, tels que (avec $|\cdot|$ la norme associée à $(\cdot \mid \cdot)$) :

$$E_1 \perp E_2, \quad \forall v \in E_1,\ (Mv \mid v) \geq 4a|v|^2 \quad \text{et} \quad \forall v \in E_2,\ |(Mv \mid v)| \leq a|v|^2.$$

Utilisant une base de E adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$, on écrira

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f = (f_1, f_2).$$

1) Montrer qu'il existe $g : E \to E$ telle que

$$\forall v \in E,\ f(v) = Mv + g(v) \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall v \in E, (|v| \leq \delta \Rightarrow |g(v)| \leq \varepsilon |v|).$$

On note C le cône $C = \{(v_1, v_2) \in E \mid |v_1| \geq |v_2|\}$: ainsi, son bord est l'ensemble $\partial C = \{(v_1, v_2) \in E \mid |v_1| = |v_2|\}$. De plus, avec h la fonction (de classe $\mathcal{C}^1$) de E dans $\mathbb{R}$ définie par $h(v_1, v_2) = |v_1|^2 - |v_2|^2$, on a $h^{-1}([0, \infty[) = C$ et $h^{-1}(\{0\}) = \partial C$.

2) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $v = (v_1, v_2) \in \overline{B}_E(0, r) \cap C$,
(i) $(v_1 \mid f_1(v)) - (v_2 \mid f_2(v)) > 0$ si $v \neq 0$,
(ii) $(v \mid f(v)) \geq a|v|^2$.
Ce nombre r est fixé, pour ce qui suit.

3) Calculer, pour tous $v = (v_1, v_2), w = (w_1, w_2) \in E$, l'expression de $h'(v)w$, et montrer que pour tout $v \in \overline{B}_E(0, r) \cap (C \setminus \{0\})$, on a $h'(v)f(v) > 0$.

On considère $\underline{u} \in E$, et u la solution maximale de $u' = f(u)$ telle que $u(0) = \underline{u}$.
On suppose que pour un certain $T > 0$, on a $u(t) \in \overline{B}_E(0, r)$ pour tout $t \in [0, T]$.

4) a) Montrer que, si $\underline{u} \neq 0$, alors pour tout $t \in [0, T]$, on a $u(t) \neq 0$.

b) Montrer que, pour tout $t \in [0, T]$, si $u(t) \in \partial C \setminus \{0\}$, alors $(h \circ u)'(t) > 0$.
En déduire que si $\underline{u} \in C$, alors pour tout $t \in [0, T]$, $u(t) \in C$.

c) En déduire que si $\underline{u} \in C$, alors pour tout $t \in [0, T]$, $(|u|^2)'(t) \geq 2a|u(t)|^2$, puis que pour tout $t \in [0, T]$, $|u(t)| \geq e^{at}|\underline{u}|$.

5) Conclure : montrer que l'équilibre 0 est instable.