M1 Année 2014/2015

Question du cours

Soit A un anneau intègre et M un A-module.

1. Donner la définition d'un élément de torsion de M.
2. Montrer que l'ensemble des élément de torsion de M est un sous-module de M

Exercice 1 :

1. Soient M une extension finie de K, et L_1, L_2 deux sous-corps de M contenant K. On suppose que $M = K(L_1 \cup L_2)$. Montrer que $[M; L_1] \leq [L_2; K]$.
2. Soit α et β des racines primitives respectivement n-ième et m-ième de l'unité dans $\overline{\mathbb{Q}}$. On suppose que $pgcd(n, m) = 1$.
   (a) Montrer que le degré de l'extension $\mathbb{Q}(\alpha)$ sur $\mathbb{Q}$ est $\varphi(n)$, où φ 1est l'indicatrice d'Euler.
   (b) Montrer que $\alpha\beta$ est racine primitive d'ordre mn.
   (c) Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha\beta) = \mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ et que $[\mathbb{Q}(\alpha\beta); \mathbb{Q}(\beta)] = [\mathbb{Q}(\alpha); \mathbb{Q}]$. En deduire que le polynôme cyclique Φ_n est irreductible sur $\mathbb{Q}(\beta)$.
   (d) Verifier que $[\mathbb{Q}(\alpha\beta); \mathbb{Q}] = \varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$
3. Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$.

Exercice 2 :

Soient k un corps et f et g deux polynômes de $k[X, Y]$. On suppose que f et g sont premiers entre eux dans l'anneau $k[X, Y]$. On note
$C_f = \{(x, y) \in k^2 \mid f(x, y) = 0\}$ et $C_g = \{(x, y) \in k^2 \mid g(x, y) = 0\}$, de sorte que C_f et C_g sont deux courbes de k^2. Le but de l'exercice est de montrer que $C_f \cap C_g$ est un ensemble fini.

1. On note $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ les images de f et g dans l'anneau $k(X)[Y]$. Comment obtient-on les décompositions de $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ en produit d'irréductibles de $k(X)[Y]$ à partir des décompositions de f et g en produit d'irréductibles de $k[X, Y]$?
2. Montrer que $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont premiers entre eux dans l'anneau $k(X)[Y]$.
3. Soit A l'ensemble des abscisses des points de $C_f \cap C_g$, c'est-à dire $A = \{t \in k \mid \exists (x, y) \in C_f \cap C_g \quad t = x\}$. Montrer que A est un ensemble fini.
4. Montrer que $C_f \cap C_g$ est un ensemble fini.

Exercice 3 :

On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}[i\sqrt{3}] = \{z \in \mathbb{C} | \ \exists P \in \mathbb{Z}[X], \quad z = P(i\sqrt{3})\}$.

1. Montrer que A est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2.
2. Soit $I = 2A$ l'idéal de A engendré par 2. Montrer que le quotient A/I est un $\mathbb{Z}$ module isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
3. Soit $J = 2A + (1 + i\sqrt{3})A$. Montrer que $(2, 1 + i\sqrt{3})$ est en fait une base de J comme $\mathbb{Z}$-module.
4. Trouver une base du $\mathbb{Z}$-module A adaptée à J.
5. Décrire la classe d'isomorphisme du $\mathbb{Z}$-module A/J.
6. Soit plus généralement K un idéal non nul de A.
   (a) Soit x un élément non nul de K . Montrer que l'idéal xA est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2.
   (b) Montrer qu'il existe un morphisme de $\mathbb{Z}$-module surjectif de A/xA dans A/K.
   (c) En déduire que A/K est fini.