Description des enseignements du L3 Mathématiques, UGA

2017-2018

S5 Parcours A - 30 ECTS	
Algèbre A	12 ECTS
Topologie A	12 ECTS
Exposé Oral A	3 ECTS
UE Transversale	3 ECTS
S6 Parcours B - 30 ECTS	
Algèbre B	12 ECTS
Topologie B	12 ECTS
Exposé Oral B	3 ECTS
UE Transversale	3 ECTS

S6 Parcours A - 30 ECTS	
Théorie de la mesure et introduction aux probabilités	12 ECTS
Calcul différentiel	9 ECTS
Anglais	3 ECTS
Introduction à la modélisation numérique	6 ECTS
S6 Parcours B - 30 ECTS	
Calcul Intégral et introduction aux probabilités	12 ECTS
Calcul différentiel	9 ECTS
Anglais	3 ECTS
Géométrie OU Introduction à la modélisation numérique	6 ECTS

TABLE 1 – Seules les UE ”Anglais” et ”Introduction à la modélisation numérique”” sont communes au parcours A & B.

Premier semestre, Parcours A

1 Algèbre

Les prérequis ne seront pas traités en cours, mais on prendra le temps en TD de s'assurer que les connaissances sont bien acquises (éventuellement à l'aide d'un test d'”entrée” agrémenté de DM afin de compléter les éventuelles lacunes).

prérequis : MAT 231, 241.

— Décomposition d'un nombre entier en produit de nombres premiers, division euclidienne, PGCD, PPCM sur $\mathbb{Z}$ et $K[X]$. Racines. Relation d'équivalence.

— (sous-)espace vectoriel, application linéaire, familles libres, génératrices. En dimension finie : bases, dimension, formes bilinéaires, matrices.... On pourra vérifier en TD que les prérequis suivants sont bien assimilés : Polynôme caractéristique, Polynômes d'endomorphisme, polynôme minimal. Diagonalisation. Espaces euclidiens. Déterminants.

I. Groupes et géométrie

— Groupes. Propriétés générales (sous-groupe, cas de $\mathbb{Z}$, intersection de sous-groupes, produit direct, sous-groupe engendré par une partie, générateurs, groupe monogène, cyclique, centre, morphismes de groupes, ordre d'un élément). Sous-groupes distingués. Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathrm{Sym}(E)$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\mathbb{U}_n$, G^X.

— *Structure des groupes orthogonaux euclidiens* : Groupes $O(E)$ et $SO(E)$. Rotations, symétries. Générateurs, centres, conjugaisons. Discussion détaillée pour la dimension 2 et 3. Réduction des endomorphismes symétriques réels. (En TD : simplicité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$).

— Groupe symétrique, décomposition en cycles, classes de conjugaison, signature, groupe alterné A_n, groupe dérivé du groupe symétrique. démonstration de la simplicité de A_n pour $n \geq 5$.

— Ensemble quotient d'un ensemble par une relation d'équivalence : définition par propriété universelle. Exemple : Classes à gauche, classes à droite selon un sous groupe. Exemple : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Théorème de Lagrange. Groupes quotients. Factorisation canonique d'un morphisme.
— Action de groupes. Action d'un (sous)-groupe par multiplication à gauche, par conjugaison, par sous-groupe. Action fidèle, transitive. Orbites, groupe d'isotropie, Équation aux classes. Exemples : groupes diédraux, groupe du cube, du tétraèdre. Application : Théorèmes de Sylow.
— *Structure du groupe linéaire* : les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$. Les transvections et les dilatations engendrent $\mathrm{GL}(E)$. Les transvections sont conjuguées dans $\mathrm{GL}(E)$ (et $\mathrm{SL}(E)$ si $\dim E \geq 3$). Centre de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$. Simplicité de $\mathrm{PSL}(E)$.

II. Introduction à la théorie des anneaux

Tous les anneaux sont commutatifs et unitaires, sauf mention explicite du contraire (anneaux de matrices) ils sont commutatifs.

— Anneaux, sous-anneaux, morphisme d'anneaux, idéaux, idéal engendré. Exemples $\mathbb{Z}, \mathbb{R}$, anneau produit, A^X, $\mathrm{M}_n(A)$. Idéaux de $\mathbb{Z}$.
— Anneau de polynômes $A[X]$, propriété universelle.
— Anneau intègre, corps, idéal maximal (résultat admis : tout idéal strict est contenu dans un idéal maximal).
— Anneaux quotients. Exemple : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Factorisation d'un morphisme.
— Anneaux intègres, divisibilité, éléments irréductibles, idéaux premiers. Caractéristique d'un anneau. Groupe des éléments inversibles, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$.
— Anneaux principaux, pgcd, ppcm, identité de Bézout, lemme de Gauss. Traduction en termes d'idéaux. Décomposition en irréductibles. Théorème des restes chinois. On prendra le temps d'illustrer les cas $K[X]/(P)$, $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, $\mathbb{Z}[i]$.
— Notion d'algèbre (définition, morphisme). Etude des algèbres $K[X]/(P)$, $\mathcal{L}(E)$, $M_n(K)$.

III. Algèbre linéaire, étude du groupe linéaire

On se limitera au cas de la dimension finie. La notion de module sur un anneau principal est hors programme et ne sera pas traitée dans ce cours.

— Supplémentaire et espace vectoriel quotient.
— Dualité : $L(E, F)$, base duale, Orthogonalité, hyperplans, base antéduale, polynôme interpolateurs de Lagrange, transposée, lien avec les matrices.
— Rappels (sans démonstrations) : lemme des noyaux, projecteurs spectraux. Sous-espaces caractéristiques. Diagonalisation, trigonalisation. Nilpotence.
— Réductions de Dunford-Jordan et de Jordan. Calcul pratique et applications : calcul des puissances d'un endomorphisme, Suite définie par récurrence.

2 Topologie

Chapitre 1 : Le corps des réels

1. *Définition de $\mathbb{R}$ et premières propriétés*
   Ensembles ordonnés, bornes supérieure et inférieure, corps ordonnés. Définition de $\mathbb{R}$ comme unique corps ordonné possédant la propriété de la borne supérieure. Propriété d'Archimède, densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
2. *Suites réelles*
   Notion de convergence, suites croissantes majorées, caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Valeurs d'adhérence, limites supérieure et inférieure d'une suite bornée, théorème de Bolzano-Weierstrass. Suites de Cauchy, complétude. Construction de $\mathbb{R}$.
3. *Développement décimal*
   Définition, existence et unicité du développement décimal propre. Caractérisation décimale de $\mathbb{Q}$.

4. *Dénombrabilité*
   Définitions, dénombrabilité d'un produit fini et d'une union dénombrable d'ensembles dénombrables. Non-dénombrabilité de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et de $\mathbb{R}$.
5. *Fonctions réelles*
   Continuité en un point et sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, caractérisation séquentielle de la continuité. Théorème des valeurs intermédiaires, image d'un segment par une application continue. Continuité uniforme, théorème de Heine sur un segment. Convergences simple et uniforme d'une suite de fonctions, continuité d'une limite uniforme de fonctions continues. Théorèmes de Dini.

Chapitre 2 : Espaces métriques, espaces vectoriels normés, espaces préhilbertiens

1. *Espaces métriques*
   Distance sur un ensemble, exemples d'espaces métriques, diamètre d'une partie, distance d'un point à une partie, inégalité triangulaire inverse.
2. *Espaces vectoriels normés*
   Norme sur un espace vectoriel, exemples d'espaces vectoriels normés, caractérisation des distances associées à une norme. Normes usuelles sur K^n, où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, inégalités de Young, de Hölder, et de Minkowski. Equivalence des normes $\|\cdot\|_p$ sur K^n pour $p \in [1, \infty]$. Normes correspondantes sur $C([a,b], K)$, et non-équivalence de celles-ci. Espaces l^p.
3. *Espaces préhilbertiens*
   Produit scalaire sur un espace vectoriel, norme associée, inégalité de Cauchy-Schwarz, identité du parallélogramme, identité de polarisation. Caractérisation des normes associées à un produit scalaire.
4. *Topologie des espaces métriques*
   Boules ouvertes, boules fermées, ensembles ouverts, ensembles fermés, voisinages. Une union quelconque ou une intersection finie d'ouverts est un ouvert. Cas des espaces vectoriels normés, invariance de la topologie par translation et dilatation, convexité des boules.
5. *Convergence des suites*
   Définition, unicité de la limite, exemples. Ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite, cas des suites de Cauchy, exemples d'espaces complets ou non. Caractérisation séquentielle des ensembles fermés.
6. *Fonction continues*
   Définition d'une application continue entre deux espaces métriques, critère séquentiel, caractérisation topologique de la continuité (l'image inverse d'un ouvert est ouvert). Compositions, sommes, ou produits d'applications continues. Applications uniformément continues, lipschitziennes. Densité d'une partie, exemples. Image d'une partie dense par une application continue et sujective. Une application continue est univoquement déterminée par sa donnée sur une partie dense.
7. *Parties compactes*
   Définition (par la propriété de Bolzano-Weierstrass), compacité implique complétude, parties compactes de K^n. Image d'une partie compacte par une application continue. Equivalence de normes, toutes les normes sur K^n sont équivalentes. Exemple de normes non équivalentes en dimension infinie. Une suite dans un compact converge vers l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. Equivalence des propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass dans le cas métrique.
8. *Homéomorphismes*
   Définition, ensembles homéomorphes, exemples (classes d'équivalence des intervalles de $\mathbb{R}$). Propriétés préservées ou non par homéomorphisme. Distances topologiquement équivalentes, distances équivalentes.
9. *Aplications linéaires continues*
   Borne d'une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés, propriétés. Applications

continues, lipschitziennes, espace vectoriel normé des applications linéaires continues. Cas de la dimension finie, exemple d'application linéaire non bornée en dimension infinie. Normes usuelles sur les matrices. Formes linéaires continues, dual topologique d'un espace vectoriel normé. Une forme linéaire est continue si et seulement si son noyau est fermé. Prolongement d'une application linéaire sur une partie dense.

Chapitre 3 Topologie générale

1. *Définitions générales*
   Topologie sur un ensemble, exemples d'espaces topologiques. Métrisabilité, espace séparable au sens de Hausdorff, voisinages et bases de voisinages. Topologie engendrée par une famille de parties. Topologie induite sur un sous-ensemble, cas des espaces métriques.
2. *Limites et continuité*
   Convergence d'une suite, unicité de la limite dans le cas séparé. Continuité d'une fonction, propriétés. Caractérisation séquentielles (partielles) des ensembles fermés et des applications continues. Transport de topologie par une application, topologie induite (ou initiale) et topologie image (ou finale).
3. *Intérieur, adhérence, frontière*
   Définitions, caractérisations, propriétés élémentaires. Comportement sous les opérations ensemblistes, image ou image inverse par une application continue. Valeurs d'adhérence d'une suite, lien avec l'adhérence de l'ensemble des valeurs de la suite. Parties denses.
4. *Produits et quotients*
   Définition et propriétés de la topologie produit dans le cas d'un nombre fini de facteurs. Les projections canoniques sont continues et ouvertes. Cas des espaces métriques. Produit infini d'espaces topologiques, produit dénombrable d'espaces métriques. Topologie quotient, exemple.
5. *Compacité*
   Parties compactes d'un espace topologique séparé (définies par la propriété de Borel-Lebesgue), propriétés élémentaires, séparation des ensembles compacts disjoints. Théorème de Tykhonov (admis dans le cas général). Un produit dénombrable d'espaces métriques compacts est un espace métrique compact. Séparation des fermés disjoints dans les espaces métriques.
6. *Connexité*
   Définition et caractérisations d'un espace ou d'une partie connexe. Sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$. Conditions suffisantes pour qu'une union de connexes soit connexe. Adhérence et image continue d'une partie connexe. Composantes connexes. Connexité par arcs, ouverts connexes d'un espace vectoriel normé. Connexité simple (facultatif). Exemple de l'ensemble de Cantor.

Chapitre 4 : Compléments et applications.

1. *Espaces métriques complets*
   Théorème de Baire, conséquences (un espace de Banach de dimension infinie n'admet pas de base algébrique dénombrable). Suites récurrentes, théorème du point fixe de Banach.
2. *Espaces de Banach*
   Définition, exemples (espaces de suites, espaces de fonctions), démonstration de la complétude.
3. *Séries dans les espaces de Banach*
   Convergence et convergence absolue d'une série dans un espace de Banach. Applications : perturbations d'un endomorphisme inversible, exponentielle d'un endomorphisme, cas particulier des matrices.
4. *Espaces de Hilbert*
   Projection sur un convexe fermé non vide, projection orthogonale sur un sous-espace fermé, théorème de représentation de Riesz. Familles orthonormées, inégalité de Bessel, bases hilbertiennes dans le cas séparable.

5. *Théorème d'Ascoli*
   Ensembles relativement compacts, familles uniformément équicontinues, théorème d'Ascoli.
6. *Théorème de Stone-Weierstrass*
   Théorème d'approximation de Weierstrass, preuve de Bernstein. Algèbres de fonctions, théorème de Stone-Weierstrass.

Premier semestre, Parcours B

1 Algèbre

Les prérequis feront l'objet de rappels en cours (sans démonstrations). On prendra le temps en TD de s'assurer que les connaissances sont bien acquises (éventuellement à l'aide d'un test d'"entrée" agrémenté de DM afin de compléter les éventuelles lacunes). On illustrera le cours avec des exemples simples.

Prérequis : MAT 231, 241.

— Décomposition d'un nombre entier en produit de nombres premiers, division euclidienne, PGCD, PPCM sur $\mathbb{Z}$ et $K[X]$. Racines. Relation d'équivalence.

— (sous-)espace vectoriel, application linéaire, familles libres, génératrices. En dimension finie : bases, dimension, formes bilinéaires, matrices.... On pourra vérifier en TD que les prérequis suivants sont bien assimilés : Déterminants (formule de Leibniz), Polynôme caractéristique, Polynômes d'endomorphisme, polynôme minimal. Diagonalisation. Espaces euclidiens.

I. Introduction à la théorie des groupes - géométrie : on insistera sur des exemples issus de l'algèbre et de la géométrie

— Théorie élémentaires des groupes : groupe, sous-groupe, caractérisation, cas de $\mathbb{Z}$, intersection de sous-groupes, produit fini de groupes, sous-groupe engendré par une partie, générateurs, centre. Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathrm{Sym}(E)$, $\mathbb{U}_n$, G^X. Morphismes de groupes. Exemple : déterminant.

— *Structure des groupes orthogonaux euclidiens* : Groupes $O(E)$ et $SO(E)$. Symétrie. Générateurs, centres, conjugaisons. Discussion détaillée pour la dimension 2 et 3. Réduction des endomorphismes symétriques réels.

— Groupe symétrique, décomposition en cycles, les transpositions engendrent le groupe symétrique, signature, groupe alterné A_n.

— Rappels sur les relations d'équivalence. Partitions, ensemble quotient. Application canonique, propriété universelle. Classes à gauche, classes à droite selon un sous groupe. Théorème de Lagrange. Groupes quotients (cas abélien). Factorisation canonique d'un morphisme. Exemple : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

— groupe monogène, cyclique. Exemples : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Lien avec $\mathbb{U}_n$. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ordre d'un élément. Lien avec l'ordre d'un élément et l'ordre du groupe qu'il engendre.

— Groupes opérant sur un ensemble. Action d'un (sous)-groupe par multiplication à gauche, par conjugaison, par sous-groupe. Action fidèle, transitive. Orbites, groupe d'isotropie, Équation aux classes. Lien avec $\mathrm{Sym}(E)$. Exemples : groupes diédraux, groupe d'isométries vectorielles du cube, du tétraèdre. Théorème de Cauchy. Formule de Burnside. Sous-groupes finis de $O_2(\mathbb{R})$.

II. Introduction aux anneaux et à l'arithmétique

*Tous les anneaux sont commutatifs et unitaires, sauf mention explicite du contraire (*e.g. *anneaux de matrices), ils sont commutatifs.*

— Anneau. Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux. Diviseurs de zéro, anneau intègre. Corps. Sous-corps. Exemples $A = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$,

$\mathrm{M}_n(A)$.
— Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal. Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre, lien avec les idéaux. Éléments irréductibles. Idéaux de $\mathbb{Z}$. Anneaux quotients. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Théorème des restes chinois pour $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
— Anneau de polynômes $K[X]$: Rappel sur division euclidienne, pgcd et ppcm. Identité de Bézout, lemme de Gauss, polynômes irréductibles, décomposition en facteurs premiers. Théorème des restes chinois.

III. Algèbre linéaire, étude du groupe linéaire

On se limitera au cas de la dimension finie et où le corps de base est $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

— Rappels sur les sommes directes.
— Formes multilinéaires, déterminants. Cas des endomorphismes et des matrices. Méthodes de calcul. Polynôme caractéristique.
— Polynômes d'endomorphisme, algèbre $K[u]$, polynôme minimal. Lemme des noyaux. Théorème de Cayley-Hamilton.
— Sous-espaces caractéristiques. Trigonalisation. Nilpotence.
— Réductions de Dunford-Jordan et de Jordan.

2 Topologie

On se limitera à une connaissance des concepts enseignés et leur application dans des situations très simples. Ce cours a pour but d'introduire les notions topologiques de base nécessaires au calcul intégral et au calcul différentiel. On se limitera aux espaces vectoriels normés réels de dimension finie (essentiellement $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ muni des normes standard), à l'exception notable de $C([a;b];\mathbb{R})$ que l'on munira des normes infinie, $||\cdot||_1$ et$||\cdot||_2$.

Ce cours a aussi pour but de renforcer les bases du raisonnement, de revoir les fondements de l'analyse réelle et des fonctions continues d'une variable réelle et les généraliser aux fonctions de plusieurs variables réelles.

1. Préliminaires sur $\mathbb{R}$.
   (a) Développement décimal d'un réel. Caractérisation des nombres rationnels.
   (b) L'ordre sur $\mathbb{R}$. Le théorème de la borne supérieure : construction de la borne supérieure à l'aide des développements décimaux.
   (c) Les suites réelles. Convergence, limite. Caractérisation séquentielle de la borne supérieure. Les suites réelles monotones. Le théorème des segments emboités et les suites adjacentes.
   (d) Valeurs d'adhérence d'une suite réelle. Théorème de Bolzano-Weierstrass.
   (e) Continuité d'une fonction d'une variable réelle. Critère séquentiel. Théorème des valeurs intermédiaires. Toute fonction f continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes,
   (f) Convergence simple et uniforme des suites de fonctions. Limite uniforme de fonctions continues.
2. Espaces vectoriels normés.
   (a) Norme sur un espace vectoriel réel, distance associée. Exemples fondamentaux.
   (b) Cas particulier : les produits scalaires. Définition, normes et distances associées. Exemples
   (c) Boules et parties bornées d'un espace vectoriel normé.
   (d) Suites d'un espace vectoriel normé. Suites convergentes. Suite de $\mathbb{R}^n$.
   (e) Parties fermées, parties ouvertes d'un espace vectoriel normé. Intersection et réunion. Adhérence, intérieur d'une partie d'un EVN.
   (f) Les parties connexes par arcs d'un EVN (la connexité est hors-programme). Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$.

(g) Suites extraites et valeurs d'adhérence. Le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}^n$.

(h) Parties compactes d'un EVN. Caractérisation en dimension finie.

(i) Parties denses d'un EVN.

3. Fonctions continues entre parties d'un EVN.

   (a) Continuité. Critère séquentiel. Exemple : les fonctions lipschitziennes.

   (b) Opérations usuelles. Composée, sommes, produits.

   (c) Fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

   (d) Fonctions continues dont la source est $\mathbb{R}^n$.

   (e) Densité et continuité.

   (f) Continuité et connexité par arcs.

   (g) Compacité et continuité. Equivalence des normes dans $\mathbb{R}^n$.

   (h) Homéomorphismes.

   (i) Applications linéaires continues, caractérisation, norme.

   (j) Fonctions uniformément continues. Définition, exemples, critère séquentiel. Théorème de Heine. Conséquence fondamentale : les fonctions affines par morceaux sur un segment sont denses dans l'espace des fonctions continues muni de la norme infinie.

   (k) Théorème de Weierstrass (sans preuve).

4. Complétude.

   (a) Suites de Cauchy d'un EVN.

   (b) Parties complètes d'un EVN. Exemples : $\mathbb{R}^n$, $C([0;1];\mathbb{R})$. Espaces de Banach. Dans un Banach, toute série absolument convergente est convergente. Applications : la convergence normale implique la convergence uniforme, la convergence des intégrales absolument convergentes, exponentielle de matrices.

   (c) Le théorème du point fixe pour les applications contractantes. Exemples : résolution de $f(x) = x$ pour les fonctions d'une variable réelle et retour sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$, méthode de Newton.

   (d) Projection orthogonale. Exemple : les séries de Fourier. Les formes linéaires continues dans les Hilbert.

   (e) Le théorème de prolongement des applications uniformément continues sur une partie dense. Application : une fonction dérivable sur]a ; b] dont la dérivée est bornée se prolonge continuement sur [a ; b].

3 Exposé oral (Parcours A&B)

L'UE oral consiste en une épreuve orale d'une durée de 30 minutes. Cette épreuve porte sur le programme des deux matières du semestre S5 (algèbre et topologie) : le candidat peut être interrogé indifféremment sur le programme de l'une ou l'autre de ces matières (à l'exception des candidats ayant déjà acquis l'une d'elles ou n'étant inscrits que dans une matière du premier semestre). Une liste de thèmes est proposée au candidat (au minimum 10 dans chaque UE). Le candidat choisit 4 de ces thèmes (2 en Algèbre et 2 en Topologie, ou 4 dans l'unique UE d'inscription) et les propose à l'examinateur, qui en retient un, sur lequel le candidat est interrogé.

Deuxième semestre, Parcours A

1 Calcul différentiel et équations différentielles, applications

I. Calcul différentiel dans les espaces de Banach.

1. Différentielle, dérivées directionnelles, dérivées partielles dans $\mathbb{R}^n$. Théorème des accroissements finis.
2. Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites.
3. Différentielles d'ordre supérieur. Lemme de Schwartz.
4. Formule de Taylor
5. Forme normale des immersions et des submersions. Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, espaces tangents (équivalence entre définitions).
6. Extrêma et extrema liés.
7. Arcs paramétrés dans $\mathbb{R}^n$, repère de Frenet, courbures.

II. Équations différentielles.

1. Équation différentielle, champs de vecteurs.
2. Théorie de Cauchy-Lipschitz locale et globale. Lemme de Gronwall. Bouts d'une solution.
3. Flot d'une équation différentielle, d'un champ de vecteurs.
4. équations différentielles linéaires. Exponentielle dans le cas constant, stabilité dans le cas constant, variation de la constante en général.
5. Caractérisation de Serret-Frenet des courbes de $\mathbb{R}^n$. Exemples classiques (intégration par quadrature, pendule).

2 Théorie de la mesure, intégration et probabilités

I. Espaces mesurés, espaces probabilisés

Algèbre de parties d'un ensemble E.

Exemple : les unions finis d'intervalles de $\mathbb{R}$. Toute union finie d'intervalles de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union finie d'intervalles disjoints.

Tribus sur un ensemble E. Espace mesurables.

Tribu engendrée par une partie de $\mathcal{P}(E)$.

Tribu borélienne sur un espace topologique.

Classes monotones. Théorème des classes monotones.

II. Mesures positives, probabilités

Définitions et premières propriétés.

Ensembles de mesure nulle. Proprités vraies presque partout.

Mesure de Stieltjes associée à une à une fonction croissante continue et à droite F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On admettra l'existence et on ne monterera que l'unicité à l'aide du théorème des classes monotones. Mesure des intervalles $]a, b]$, $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b[$.

Les mesures boréliennes positives sur $\mathbb{R}$ sont exactement les mesures de Stieltjes. Exemples de mesures discrètes, singulières continues, absolument continues (même si l'on ne peut pas encore le montrer). La mesure de Stieltjès associée à F s'obtient comme mesure image de la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $]F(-\infty), F(+\infty)[$ par la fonction pseudo-inverse de F.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Invariance par symétrie et translation.

Exemples de parties de $\mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle.

Applications mesurables entre deux espaces mesurables. Tribu initiale associée. Mesure image. Exemples.

III. Intégration par rapport à une mesure positive

Intégration des fonctions étagées (à valeurs dans $\mathbb{R}$).

Intégration de fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. Si l'intégrale est finie, la fonction est finie presque partout. Si l'intégrale est nulle, la fonction est finie presque partout.

Intégration des fonctions intégrables à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

Le module de l'intégrale est plus petit que l'intégrale du module. Cas d'égalité.

Liens entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Intégration par rapport à une mesure discrète. Intégration par rapport à une mesure à densité (ce point utilise le théorème de Beppo-Lévi)

Théorèmes de Beppo-Lévi, Fatou, convergence dominée.

Continuité, dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre

Intégrale indéfinie $\int_a^\cdot f$.

IV. Espaces L^p

On fait le minimum utile pour les probabilités.

Définition, inégalités de Hölder et de Minkovski.

Toute série de fonctions normalement convergente dans $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ converge presque partout et dans $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. L'espace de Banach $L^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ est complet.

V. Produit de deux espaces mesurés (ou d'un nombre fini)

Espaces, tribus et mesures produits.

Théorème de Fubini.

Mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Invariance par isométrie. Effet d'une application linéaire.

Formule de changement de variables (énoncée mais admise). Application à la détermination de mesures images.

VI. Convolution et transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^d$

Faire le minimum utile pour les probabilités. Peut-être seulement en TD, comme exemples d'utilisations des théorèmes d'intégration.

Convolution de deux fonctions dans L^1.

Transformée de Fourier sur L^1 (prendre la convention $\int f(x)e^{-itx}dx$).

Transformée de Fourier d'un produit de convolution.

Transformée de Fourier de la densité d'une gaussienne centrée.

Formule d'inversion pour $f \in L^1$ telle que $\mathcal{F}f$ soit dans L^1.

Formule de Plancherel.

Définition de la transformée d'une fonction de L^2.

Convolution de deux mesures positives finies. Cas où l'une des deux possède une densité.

VII. Probabilités

1. Vocabulaire probabiliste
   - Variable aléatoire, loi, tribu associée.
   - Couples de variables aléatoires. Loi jointe et lois marginales.
   - Variables aléatoires réelles : fonction de répartition, conditions d'existence d'une densité, espérance.
   - Théorème de transfert. Cas de variables aléatoires discrètes Cas de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et à densité.
   - Variance, écart-type, covariance, coefficient de corrélation.
   - Probabilité et espérance sachant un événement.
2. Indépendance
   - Indépendance de tribus, de variables aléatoires, de n événements, de deux événements.
   - Critères pour savoir que des variables aléatoires discrètes sont indépendantes.
   - Critères pour savoir que des variables aléatoires réelles sont indépendantes.

— Indépendance et espérance.
— Somme de variables aléatoires indépendantes : loi, variance.
— Loi du zéro-un de Kolmogorov.

3. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$
— Fonction de répartition.
— Espérance, matrice de covariances.
— Fonction caractéristique.
— La fonction caractéristique détermine la loi. Corollaire : critère d'indépendance des composantes.
— Fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes.
— Variables aléatoires gaussiennes.

4. Théorèmes limites
— Théorèmes de Borel Cantelli
— Convergence presque sûre, en probabilité dans L^p.
— Loi faible et loi forte des grands nombres. Loi forte prouvée seulement pour des variables dans L^4.
— Convergence en loi. Définitions équivalentes.
— Théorème de Lévy.
— Théorème limite central, théorème de Poisson.
Commentaire : pas le temps de faire des statistiques.

Deuxième semestre, Parcours B

1 Calcul différentiel

Ce cours comprend trois grandes parties. La première concerne le calcul différentiel en dimension finie (avec un accent mis sur les dimensions deux et trois), la seconde les équations différentielles (essentiellement linéaires), et la troisième les courbes et les surfaces (CAPES).

I. Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

1. Fonctions différentiables
   (a) Fonctions différentiables d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Dérivées partielles, jacobienne. Inégalité des accroissements finis.
   (b) Dérivées d'ordre deux. Formule de Taylor à l'ordre deux, théorème de Schwarz. Matrice hessienne.
   (c) Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites. Applications (stabilité d'une racine simple d'un polynôme, d'un point fixe d'un système dynamique).
2. Extréma
   (a) Extréma libres : recherche d'extréma. Points critiques, étude locale, lien avec la hessienne.
   (b) Extréma liés dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
   (c) Extréma provenant de la géométrie du triangle.

II. Équations différentielles

1. Le cas linéaire
   (a) Théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y' = A(t)y + B(t)$. Théorème du point fixe pour la démonstration de C-L. Structure de l'espace des solutions, Wronskien.

(b) Cas particuliers : $n = 1$, $n > 2$ et A constante, exponentielle de matrice, variation de la constante, systèmes 2×2 à coefficients constants, équations scalaires du second ordre $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$.

2. Le cas non linéaire en dimension 1

(a) Le théorème de Cauchy-Lipschitz pour $y' = f(t; y)$.

(b) Quelques exemples de problèèmes de la forme $a(t)y' = f(t; y)$ avec $a(0) = 0$: recollement de solutions.

III. Courbes et surfaces dans $\mathbb{R}^3$

1. Courbes

(a) Courbes paramétrées de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, tangente.

(b) Propriétés métriques : longueur, abscisse curviligne, courbure, torsion, repère de Frenet. Caractérisation d'une courbe par la courbure et la torsion à isométrie près.

(c) Étude de courbes singulières.

2. Surfaces

(a) Surfaces dans $\mathbb{R}^3$ paramétrées ou définies de façon implicite. Plan tangent. Position de la surface par rapport au plan tangent.

(b) Propriétés métriques : longueur, aire, formes fondamentales, courbure de Gauss.

2 Calcul Intégral et introduction aux probabilités

Ce cours comprend trois parties :

— Le calcul intégral en dimension un, *on se restreindra à l'intégration des fonctions continues par morceaux*;

— Le calcul intégral en dimension supérieure, avec un accent sur les dimension deux et trois;

— Une introduction aux probabilités à densité continue, telles qu'elles sont utilisées en terminale.

I. Calcul intégral en dimension un

I.1. Intégration sur un intervalle compact

— Intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment : construction de l'intégrale à l'aide des résultats du cours de topologie sur le prolongement des applications uniformément continues. Positivité et linéarité de l'intégrale, inégalité de Cauchy-Schwarz. Formule de Chasles. Formule de la moyenne;

— Convergence des sommes de Riemann;

— Intégration par parties. Théorème de changement de variables.

— Intégrale dépendant de la borne supérieure;

— Intégrale dépendant d'un paramètre, lien avec la convergence uniforme, continuité, dérivabilité;

— Calcul approché des intégrales (rectangles, trapèzes, Simpson), avec estimation du terme d'erreur;

— Applications : intégrale curviligne (le long d'une courbe régulière du plan), longueur d'une courbe paramétrée.

I.2. Intégrales impropres

— Intégrales impropres, cas des fonctions positives, comparaison séries/intégrales;

— Intégrales impropres dépendant d'un paramètre, convergence uniforme, continuité, dérivabilité.

II. Calcul intégral en dimension supérieure.

— Fonctions en escalier en dimension supérieure, sommes de Darboux inférieures et supérieures pour une fonction bornée, définition de l'intégrale, cas des applications continues sur un pavé;

— Intégration des fonctions continues de deux et trois variables sur des domaines ≪ simples ≫ (boule notamment) ;
— Énoncé des théorèmes de Fubini et de changement de variables (admis). Coordonnées polaires (éventuellement sphériques).
— Intégrales impropres dans le cas de fonction à valeurs positives, exemple : intégrale de la gaussienne ;
— Produit de convolution. Définition, bilinéarité, commutativité et associativité.

III. Applications aux probabilités
III.1. Probabilités
— Notions minimales sur les espaces probabilisés (*rappelons que la théorie de la mesure n'est pas au programme*), variable aléatoire à valeur réelle, loi d'une variable aléatoire ;
— Variable aléatoire à densité (on se restreindra au cas continu par morceaux) ;
— Espérance, moments, variance ;
— Exemples de lois continues obtenues comme limites de lois discrètes : loi uniforme sur un intervalle compact, loi exponentielle à partir de lois géométriques, loi normale et loi binomiale (théorème de Moivre). Lien avec les sommes de Riemann. On pourra rappeler (en cours ou TD) comment les lois discrètes interviennent ≪ naturellement ≫ (modèle d'urne et sondage, pile ou face...).
— Vecteur aléatoire à densité en dimension finie, indépendance d'une famille finie de variables aléatoires, loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes ;
— Inégalité de Tchebychev, loi faible des grands nombres ;

III.2. Quelques utilisations en statistiques
— Définitions : modèle statistique (famille de lois indexée par un paramètre, échantillon) ;
— Intervalle de confiance, niveau non asymptotique ou asymptotique, exemples : paramètre p d'un échantillon de loi de Bernouilli, moyenne pour un échantillon gaussien de variance connue.

3 Géométrie

I. Espaces affines réels de dimension finie. Calcul barycentrique, convexité.
Transformations affines.
II. Espaces affines euclidiens de dimension 2 ou 3. Isométries.
Configurations usuelles (triangles, cercles et sphères, coniques).
III. Utilisation des nombres complexes en géométrie. Similitudes planes.
Homographies.

Commun aux parcours A et B

1 Introduction à la modélisation numérique

1. Intro/motivations : un premier exemple de modélisation numérique. Discrétisation par différences finies, formulation matricielle, inversibilité, positivité.
2. Analyse matricielle : analyse en flottants, algorithme du pivot de Gauss, LU, Cholesky, conditionnement.
3. Différences finies : retour sur la résolution de l'équation de Laplace. Propriétés des fonctions harmoniques et leur version discrète. Marches aléatoire sur une grille et processus de diffusion.
4. Interpolation et approximation : décomposition QR, moindre carres, Lagrange, differences divisees, erreur, Tchebyshev.

5. Intégration : méthode des trapezes, Simpson, ordre/erreur, quadratures de Gauss, accélération des trapèzes Richardson-Romberg, cas des fonctions periodiques, Monte-Carlo.
6. Problèmes aux valeurs propres : page ranking, théorème de Perron-Frobenius, point fixe et méthode de la puissance.
7. Quelques éléments d'optimisation convexe numérique : méthodes de gradient, de Newton. Méthodes non lisses de type Prox.
8. Modélisation par équation différentielles : exemples classiques et leurs discrétisations. Notions de schémas explicite/implicite.
9. DFT/FFT : méthode de séparation des variables pour l'équation de la chaleur, résolution par FFT.