Master de Mathématiques
MAT4117 – EDO et EDP

UGA
2016-2017

Contrôle continu 1

25/10/2016

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Durée: 2 heures

Exercice 1. *Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. On considère le problème de Cauchy*

$$(PC)\quad \begin{cases} x' = F(t,x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

1. *Donner la définition de solution maximale et solution globale de (PC).*
2. *Soient $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Démontrer que si*

$$|F(t,x)| \leq \alpha(t)|x| + \beta(t) \quad \textit{pour tous} \quad x \in \mathbb{R}^2,\ t \in \mathbb{R},$$

alors la solution de (PC) est globale.

Exercice 2. *On considère le système*

$$(*)\quad \begin{cases} x' = -x^2(y^2-1) \\ y' = y^2(x^2-1). \end{cases}$$

(1) Trouver les points d'équilibre du système $(*)$ et étudier la stabilité de chaque équilibre pour le système linéarisé correspondant. Pouvez-vous en déduire la stabilité de ces équilibres pour le système $(*)$?

(2) Donner la définition d'un point d'équilibre stable et démontrer que le point d'équilibre $(0,0)$ n'est pas stable pour le système $(*)$.

Dans ce qui suit on suppose que $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

(3) Démontrer qu'il existe une solution maximale $(x,y) :]a,b[\to \mathbb{R}^2$ du problème de Cauchy

$$(**)\quad \begin{cases} x' = -x^2(y^2-1) \\ y' = y^2(x^2-1) \\ x(0) = x_0,\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

et que pour tout $t \in]a,b[$ on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.

(4) Soient $S =]0,1[\times]0,1[$ et $(x_0, y_0) \in S$. Démontrer que la solution de $(**)$ sort de S en temps fini, c'est-à-dire il existe $t > 0$ tel que $(x(t), y(t)) \notin S$.

(5) Vérifier que $H(x,y) = x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y}$, est une intégrale première pour $(*)$. Démontrer que la solution de $(**)$ est globale.

(6) Soit $(x_0, y_0) \in S$. En admettant que la trajectoire $\{(x(t), y(t)) : t \geq 0\}$ retourne dans S, démontrer que la solution est périodique.

Exercice 3. *Soit $\alpha > 0$ un paramètre réel. On considère le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x(x-1)(x^2-t^2)}{12\alpha^4}, \\ x(0) = \alpha. \end{cases}$$

(a) *Démontrer que pour tout $\alpha > 0$ il existe une unique solution maximale $x_\alpha :]A_\alpha, B_\alpha[\to \mathbb{R}$ strictement positive sur $]A_\alpha, B_\alpha[$.*

(b) *Soit $\alpha \in]0, 1]$.*

- *Démontrer que la solution maximale est globale.*
- *Démontrer que la limite $\lim_{t \to +\infty} x_\alpha(t)$ existe et la calculer.*

(c) *Soit $\alpha > 1$.*

- *Démontrer que $A_\alpha = -\infty$.*
- *Démontrer que $x_\alpha(2\alpha) < 2\alpha$.*
- *Démontrer que $B_\alpha = +\infty$.*
- *Démontrer que la limite $\lim_{t \to +\infty} x_\alpha(t)$ existe et la calculer.*
- *Démontrer que la limite $\lim_{t \to -\infty} x_\alpha(t)$ existe et la calculer.*

Master de Mathématiques
MAT4117 – EDO et EDP

UGA
2016-2017

Contrôle continu 2

13/12/2016

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Durée: 2 heures

Exercice 1. *Soit* $L > 0$.

1. *Donner la définition de l'espace de Sobolev* $H^1(0, L)$.
2. *Démontrer que si* $u \in H^1(0, L)$ *et* $u(0) = 0$, *alors*

$$\|u\|_{L^\infty(0,L)} \leq L \left(\int_0^L |\partial_x u|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

3. *Démontrer que si* $u \in H^1(0, L)$ *et* $u(0) = 0$, *alors*

$$\int_0^L u^2(x) \, dx \leq \frac{L^2}{2} \int_0^L |\partial_x u|^2 \, dx.$$

Exercice 2. *Soit* $a \in C^\infty(\mathbb{R})$ *une fonction telle que* $1 \leq a(x) \leq 2$ *pour tout* $x \in [0, 1]$.

1. *Donner la définition de l'espace* $H_0^1(0, 1)$.
2. *Démontrer que l'application*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_a : H_0^1(0,1) \times H_0^1(0,1) \to \mathbb{R},$$

$$\langle u, v \rangle_a = \int_0^1 a(x) \partial_x u(x) \partial_x v(x) \, dx,$$

est un produit scalaire et que $H_0^1(0, 1)$, *muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.*

3. *Démontrer que pour tout* $f \in L^2(0, 1)$ *il existe une unique fonction* $u \in H^1(0, 1)$, *solution faible de l'équation*

$$(1) \quad \begin{cases} -\partial_x \big(a(x) \partial_x u(x) \big) = f(x) & \text{pour tout} \quad x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

4. *Démontrer que si* $\varphi \in H_0^1(0, 1)$, *alors* $\varphi / a \in H_0^1(0, 1)$.
5. *Donner la définition de* $H^2(0, 1)$.
6. *Démontrer que* $u \in H^2(0, 1) \cap H_0^1(0, 1)$ *et que*

$$\partial_{xx} u = - \left(\frac{\partial_x a}{a} \partial_x u + \frac{f}{a} \right) \quad \text{sur} \quad]0, 1[.$$

En déduire que u est solution forte de (1).

Exercice 3. *Soit* $u : [0,+\infty[\times[0,1] \to \mathbb{R}$ *une fonction* C^3 *telle que*

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) = \partial_{xx} u(t,x) - u^3(t,x) \quad \textit{pour tout} \quad t \in]0,+\infty[, \ x \in]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \textit{pour tout} \quad t \in]0,+\infty[. \end{cases}$$

(1) Démontrer que la fonction $t \mapsto \int_0^1 u^2(x,t)\,dx$ *est décroissante.*

(2) Démontrer que la fonction $t \mapsto \int_0^1 |\partial_x u|^2(x,t)\,dx$ *est décroissante.*

(3) Démontrer que $\lim_{t\to+\infty} \int_0^1 |\partial_x u|^2(x,t)\,dx = 0$ *et* $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$.

(4) Démontrer que si $u(0,x) \geq 0$ *pour tout* $x \in [0,1]$, *alors* $u \geq 0$ *sur* $[0,+\infty[\times[0,1]$.

Master de Mathématiques
MAT4117 – EDO et EDP

Université Grenoble Alpes
2016-2017

Examen, session 1

Mercredi 4 janvier 2017 ; durée : 3 heures

Documents, calculatrices et téléphones interdits.
Il sera particulièrement tenu compte du soin apporté à la rédaction.
Barême approximatif : exercice 1 sur 7 points ; exercice 2 sur 6 points ; exercice 3 sur 10 points.

Exercice 1.
Dans cet exercice, on considère le mouvement d'un pendule pesant rigide, sans frottement : après normalisation, l'angle θ entre le bras du pendule et la direction donnée par la pesanteur vérifie $\theta'' + \sin\theta = 0$. Notant x pour cet angle, et y pour la vitesse angulaire, on obtient :

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\sin x. \end{cases} \tag{1}$$

Avec $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}$ donnés, on assortira ce système différentiel de la condition initiale

$$x(0) = \underline{x}, \quad y(0) = \underline{y}. \tag{2}$$

1) Justifier que le problème de Cauchy (1)-(2) admet une unique solution maximale $(x, y) \in C^1(]-T_-, T_+[, \mathbb{R}^2)$, avec $T_-, T_+ \in]0, \infty]$. C'est cette solution maximale que l'on considèrera dans la suite.
2) Montrer que la fonction $t \mapsto E(t) = y(t)^2/2 - \cos(x(t))$ est constante sur $]-T_-, T_+[$. En déduire que y est bornée, puis que $T_- = T_+ = \infty$
$\big($pour cela, on pourra noter que pour tout $t \in]-T_-, T_+[$, on a $x(t) = \underline{x} + \int_0^t y(t')\,\mathrm{d}t'\big)$.
3) Donner tous les équilibres associés à (1). Pour chacun de ces équilibres, donner le système linéarisé associé. Pour ce système linéarisé, l'équilibre $(0, 0)$ est-il stable ? asymptotiquement stable ? instable ? Pouvez-vous en déduire si l'équilibre considéré est lui-même stable ou instable pour (1) ?
4) On s'intéresse spécifiquement à l'équilibre $(0, 0)$ pour (1).
a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que, si $\underline{x}^2 + \underline{y}^2 \le r^2$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|x(t)| \le \varepsilon$ (on pourra noter que $\cos x(t) \ge -E(t) = -E(0)$).
b) Montrer que l'équilibre $(0, 0)$ est stable.

Exercice 2. Dans cet exercice, toutes les fonctions sont à valeurs réelles.
Soit $F \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $|F'(y)| \le 1$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On souhaite résoudre le problème

$$\begin{cases} -\partial_x^2 u = F(u) \quad \text{sur }]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

où, pour tout $v :]0, 1[\to \mathbb{R}$, on note $F(v)$ pour $F \circ v$: $\forall x \in]0, 1[, \quad F(v)(x) = F(v(x))$.
1) Rappeler la définition de l'espace de Sobolev $H^1(]0, 1[)$ (et de la norme associée).
On rappelle que $H_0^1(]0, 1[)$ est l'adhérence dans $H^1(]0, 1[)$ de l'ensemble $\mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[)$, et qu'une norme sur $H_0^1(]0, 1[)$ est donnée par $\|v\|_{H_0^1} = \|\partial_x v\|_{L^2}$. On a en fait :

$$\forall v \in H_0^1(]0, 1[), \quad \|\partial_x v\|_{L^2} \ge \sqrt{2}\, \|v\|_{L^2}.$$

2) Montrer que pour tout $f \in L^2(]0,1[)$, il existe un unique $u_f \in H_0^1(]0,1[)$ solution faible de $-\partial_x^2 u_f = f$, ce qui signifie :

$$\forall \varphi \in H_0^1(]0,1[), \quad \int_0^1 \partial_x u_f(x) \partial_x \varphi(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\, \mathrm{d}x.$$

3) Montrer que pour tout $v \in L^2(]0,1[)$, on a $F(v) \in L^2(]0,1[)$
(on pourra commencer par écrire que pour tout $x \in]0,1[$, $F(v(x)) = F(0) + \displaystyle\int_0^{v(x)} F'(y)\, \mathrm{d}y$).
4) Par les résultats de 2) et 3), on définit donc une application $\mathcal{R}$ de $H_0^1(]0,1[)$ dans lui-même, qui à $v \in H_0^1(]0,1[)$ associe $\mathcal{R}(v) = u_{F(v)}$. Montrer que cette application est une contraction stricte, c'est-à-dire qu'il existe $C \in]0,1[$ tel que :

$$\forall v, w \in H_0^1(]0,1[), \quad \|\mathcal{R}(v) - \mathcal{R}(w)\|_{H_0^1} \leq C\|v - w\|_{H_0^1}$$

(on pourra exprimer que $u_{F(v)}$ et $u_{F(w)}$ sont solutions faibles comme au 2) et utiliser la même fonction test $\varphi = u_{F(v)} - u_{F(w)}$ dans chaque cas).
5) Conclure : montrer qu'il existe un unique $u \in H_0^1(]0,1[)$ solution faible de (3).

Exercice 3. Dans cet exercice, il est sous-entendu que les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{C}$. On choisit pour la transformation de Fourier la normalisation suivante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}f(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

On rappelle que lorsque I est un intervalle, et $g \in \mathcal{C}(I, L^2(\mathbb{R}))$, on définit sa transformée de Fourier partielle $\widehat{g} = \mathcal{F}g \in \mathcal{C}(I, L^2(\mathbb{R}))$ par

$$\forall t \in I, \quad \widehat{g}(t) = \mathcal{F}(g(t)).$$

On considère l'équation de la chaleur non-linéaire suivante :

$$\partial_t u - \partial_x^2 u = -u^3 \quad (t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}). \tag{4}$$

1) Pour tout $s \geq 0$, donner la définition de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, avec sa norme.
2) Soit $s \geq 0$ et $f \in H^s(\mathbb{R})$. Montrer qu'en posant

$$\forall t \geq 0, \quad u_f(t) = S(t)f = \mathcal{F}^{-1}\left(e^{-t|\cdot|^2}\widehat{f}\right),$$

a) on définit pour tout $t \geq 0$ une fonction $u_f(t)$ dans $H^s(\mathbb{R})$ vérifiant $\|u_f(t)\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^s}$, et que de plus, $u_f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, H^s(\mathbb{R}))$;
b) si $s \geq 2$, on a aussi $u_f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, H^{s-2}(\mathbb{R}))$, et u_f est solution (au sens faible) du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u_f - \partial_x^2 u_f = 0 \quad (\text{dans } \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}))), \\ u_{f|_{t=0}} = f. \end{cases}$$

3) Montrer que si $s > 1/2$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall f \in H^s(\mathbb{R}), \quad \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{H^s}.$$

4) On rappelle qu'une norme équivalente à $\|\cdot\|_{H^1}$, encore notée $\|\cdot\|_{H^1}$, est donnée par

$$\|f\|_{H^1} = \|f\|_{L^2} + \|f'\|_{L^2}.$$

Montrer qu'il existe $C_1 > 0$ tel que

$$\forall f_1, f_2 \in H^1(\mathbb{R}), \quad f_1 f_2 \in H^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|f_1 f_2\|_{H^1} \leq C_1\|f_1\|_{H^1}\|f_2\|_{H^1}$$

(on pourra commencer avec $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et utiliser la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ dans $H^1(\mathbb{R})$).

En déduire que, si I est un intervalle et $g \in \mathcal{C}(I, H^1(\mathbb{R}))$, alors $g^3 \in \mathcal{C}(I, H^1(\mathbb{R}))$, et

$$\forall t \in I,\ \|g(t)^3\|_{H^1} \leq C_1^2 \|g(t)\|_{H^1}^3.$$

5) On admettra que pour tous $T > 0$ et $\underline{u} \in H^1(\mathbb{R})$, si $u \in \mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}))$ vérifie

$$(5) \qquad \forall t \in [0,T], \quad u(t) = S(t)\underline{u} - \int_0^t S(t-t')(u(t')^3)\,\mathrm{d}t',$$

alors u est solution de (4). Montrer que pour tout $R > 0$, lorsque $\|\underline{u}\|_{H^1} \leq R$, il existe $T > 0$ tel que (5) ait une solution $u \in \mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}))$ (on pourra utiliser un argument de point fixe dans la boule fermée $B(0, R+1)$ de $\mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}))$). On notera que T peut être choisi en fonction de R seulement (et pas de $\underline{u}$).
6) Montrer, pour tout $T > 0$, l'unicité dans $\mathcal{C}([0,T], H^1(\mathbb{R}))$ de la solution de (5) : si u_1, u_2 sont deux telles solutions, on pourra montrer que pour tout $t \in [0,T]$,

$$\|(u_2 - u_1)(t)\|_{H1} \leq C_1^2 \sup_{t' \in [0,T]} \left(\|u_1(t')\|_{H1} + \|u_2(t')\|_{H1}\right)^2 \int_0^t \|(u_2 - u_1)(t')\|_{H1} \mathrm{d}t',$$

et utiliser un lemme de Gronwall qu'on énoncera et démontrera.
7) Montrer que si $u \in \mathcal{C}([0,T], H^2(\mathbb{R})) \cap \mathcal{C}^1([0,T], L^2(\mathbb{R}))$ est solution de (4) pour un certain $T > 0$ et est *à valeurs réelles*, alors $t \mapsto \|u(t)\|_{L^2}$ est décroissante sur $[0,T]$.

M1
EDO-EDP, seconde session

Université Grenoble Alpes
mercredi 21 juin 2017

Après 25 minutes de préparation, présentez en 25 minutes ce que vous aurez compris (sans doute pas tout, car l'énoncé est long).

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère l'équation (scalaire) en dimension un d'espace suivante,

$$\partial_t u + \partial_x f(u) = 0. \tag{1}$$

1. On se donne $\underline{u} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, bornée, ainsi que sa dérivée. On va justifier qu'il y a une unique solution classique au problème de Cauchy formé par (1) et

$$u_{|t=0} = \underline{u}, \tag{2}$$

localement en temps, par la méthode des caractéristiques.

(a) Si $u \in C^1([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ est solution du problème de Cauchy (1)-(2), définir pour chaque $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$ la (courbe) caractéristique X passant par (t,x) par

$$\dot{X}(s) = f'(u(s, X(s))), \quad X(t) = x.$$

Montrer que $s \mapsto u(s, X(s))$ est constante, que la caractéristique est globale (*i.e.* définie pour $s \in [0,T]$ entier), et que c'est une portion de droite de la forme $s \mapsto y(t,x) + sf'(\underline{u}(y(t,x)))$.

(b) Réciproquement, montrer qu'en choisissant $T > 0$ assez petit, pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$, il existe un unique $y \in \mathbb{R}$ tel que $y + tf'(\underline{u}(y)) = x$, puis définir u et vérifier que cela fournit une solution classique au problème de Cauchy (1)-(2).

2. Pour un $\underline{u} \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on fait une approximation parabolique de l'équation (inutile de préciser ici ce que cela signifie). Justifier qu'il y a un $T > 0$ et une unique solution continue bornée sur $]0,T[\times\mathbb{R}$ au problème intégral associé, c'est-à-dire :

$$u(t,x) = (K_t * \underline{u})(x) + \int_0^t ((\partial_x K_{t-t'}) * f(u(t', \cdot))(x)\, \mathrm{d}t',$$

où K_t est le noyau de la chaleur : $K_t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}$.

Indication : on pourra utiliser un argument de point fixe dans le Banach des fonctions continues bornées sur $]0,T[\times\mathbb{R}$, en évaluant la norme L^1 en espace de $\partial_x K_t$.

3. Montrer que, si on se donne $\varepsilon, T > 0$ et $u^\varepsilon \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x f(u^\varepsilon) = \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon,$$

alors pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ à support inclus dans $[0, T[\times\mathbb{R}$, on a :

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} (u^\varepsilon \partial_t \phi + f(u^\varepsilon)\partial_x \phi + \varepsilon u^\varepsilon \partial_x^2 \phi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} (u^\varepsilon \phi)(0,x)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4. Soit $\underline{u} \in C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $T > 0$. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u^\varepsilon \in L^\infty(]0, T[\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ à support inclus dans $[0, T[\times\mathbb{R}$, on ait :

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} (u^\varepsilon \partial_t \phi + f(u^\varepsilon)\partial_x \phi + \varepsilon u^\varepsilon \partial_x^2 \phi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \underline{u}(x)\phi(0,x)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On suppose de plus que la suite $(u^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[\times\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et converge presque partout (lorsque ε tend vers 0) vers une fonction u. Montrer que u est solution faible du problème de Cauchy (1)-(2), ce qui signifie que pour toute fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ à support inclus dans $[0, T[\times\mathbb{R}$,

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}} (u \partial_t \phi + f(u)\partial_x \phi)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} \underline{u}(x)\phi(0,x)\,\mathrm{d}t = 0.$$