# Gestion d'une retenue d'eau

Université de Grenoble - Préparation à l'agrégation

Christophe Leuridan

Le climat méditerranéen se caractérise entre autres par la rareté et la variabilité des précipitations : en dehors d'averses ponctuelles qui peuvent être très violentes, il ne pleut pratiquement pas. Cette irrégularité pose à la fois des problèmes de sécheresse pendant les périodes où il ne pleut pas et d'inondation lors d'orages importants. Des retenues d'eau peuvent permettre à la fois de soutenir les rivières à l'étiage et d'écrêter les crues. Nous nous proposons d'étudier un modèle « simple » de gestion d'un réservoir.

## 1 Un modèle simplifié

Nous supposerons le réservoir de capacité illimitée et contenant une quantité d'eau initiale $z_0$. Ce réservoir est alimenté uniquement par les précipitations et se vide à un débit constant $\kappa > 0$ tant qu'il reste de l'eau.

On suppose que les précipitations se produisent à des instants $T_1 < T_2 < \dots$ donnés par un processus de Poisson d'intensité $\lambda$ et que les volumes $\xi_1, \xi_2, \dots$ de ces précipitations forment une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, indépendante des instants $T_1, T_2, \dots$.

A l'instant $t$, le réservoir a donc reçu un volume d'eau donné par

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i \quad \text{où} \quad N_t = \max\{n \in \mathbf{Z} : T_n \leq t\}.$$

Notons $Z_t$ le volume d'eau dans le réservoir à l'instant $t$. Comme pendant l'intervalle de temps $[0,t]$, le réservoir s'est vidé de la quantité $\kappa \int_0^t \mathbf{I}_{[Z_s>0]}$, on a donc

$$Z_t = z_0 + X_t - \kappa \int_0^t \mathbf{I}_{[Z_s>0]} ds$$

Cette égalité décrit la fonction $t \mapsto Z_t$ (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) comme solution d'une équation intégrale. Pour résoudre cette équation, il est préférable de la réécrire sous la forme

$$Z_t = z_0 + Y_t + \kappa \int_0^t \mathbf{I}_{[Z_s=0]} ds$$

où $Y_t = X_t - \kappa t$. On montre facilement que la solution est donnée par

$$Z_t = z_0 + Y_t + I_t \quad \text{où} \quad I_t = \kappa \int_0^t \mathbf{I}_{[Z_s=0]} ds = \inf_{0 \leq s \leq t} (z_0 + Y_s)_-.$$

en notant $x_- = \max(-x, 0)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Suggestion de développement : démontrer la formule. On pourra démontrer l'égalité sur chaque intervalle $[T_n, T_{n+1}[$ par récurrence sur $n$. Il est conseillé de faire des dessins.

## 2 Comportement asymptotique de $Z_t$

Notons $m$ l'espérance commune des variables aléatoires $\xi_i$. Une application de la loi forte des grands nombres montre que $X_t/t \to \lambda m$ presque sûrement d'où $Y_t/t \to \lambda m - \kappa$ quand $t \to +\infty$. De l'égalité $Z_t = z_0 + Y_t + I_t$, on en déduit que

- si $\kappa < \lambda m$, alors $Z_t \to +\infty$ : le réservoir se remplit indéfiniment.
- si $\kappa > \lambda m$, alors $I_t \to +\infty$ : le réservoir finit toujours par se vider.

Le cas où $\kappa = \lambda m$ est plus délicat. On peut montrer que $I_t \to +\infty$ mais que pour tout $z \geq 0$, $P[Z_t \leq z] \to 0$ quand $t \to +\infty$.

Suggestions de développement :

1. démontrer ces affirmations. Que représente $I_t/\kappa$ ?
2. Simuler le processus pour différentes valeurs des paramètres et représenter les trajectoires des processus $X, Y, Z, I$ sur un même graphique. On prendra les variables aléatoires $\xi_n$ de loi exponentielle.
3. En réalité, les paramètres $\lambda$ et $m$ évoluent au cours des saisons, et il est possible de régler le paramètre $\kappa$ par l'ouverture ou la fermeture de vannes. Comment doit-on choisir $\kappa$ pour soutenir les rivières à l'étiage, éviter les inondations à l'automne et produire de l'électricité en hiver ?

## 3 Retour à l'état vide

Nous allons déterminer la probabilité que le réservoir se vide complètement lorsque $\kappa < \lambda m$. Soit $T = \inf\{t \geq 0 : Z_t = 0\}$ le premier instant où la retenue se vide complètement. Comme $I_t = 0$ pour $t \leq T$, on a aussi vérifie $T = \inf\{t \geq 0 : Y_t = -z_0\}$.

Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires et pour tout $\theta \geq 0$,

$$\mathbf{E}[e^{-\theta Y_t}] = e^{\lambda t(\psi(\theta)-1)} \quad \text{avec} \quad \psi(\theta) = \mathbf{E}[e^{-\theta \xi_1}].$$

Notons $\phi(\theta) = \lambda(\psi(\theta)-1)$. Alors $\mathbf{E}[e^{-\theta Y_t}] = e^{(\phi(\theta)+\kappa\theta)t}$. On vérifie facilement qu'il existe un unique $\alpha > 0$ tel que $\phi(\alpha) + \kappa\alpha = 0$. Pour ce choix de $\alpha$, le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par $M_t = e^{-\alpha Y_t}$ est une martingale continue à droite qui vérifie $0 \leq M_{t\wedge T} \leq e^{\alpha z_0}$ pour tout $t \geq 0$. Mais $M_T = e^{\alpha z_0}$ sur l'événement $[T < +\infty]$ et $M_t \to +\infty$ quand $t \to +\infty$. Le théorème d'arrêt s'applique et donne $P[T < +\infty] = e^{-\alpha z_0}$.

Lorsque $\kappa > \lambda m$, le réservoir finit toujours par se vider et il est possible de calculer la transformée de Laplace de l'instant $T$. En effet, pour tout $\beta \geq 0$, l'équation $\phi(\theta)+\kappa\theta = \beta$ possède une unique solution $\alpha(\beta)$. Le processus $(M_t)_{t\geq 0}$ défini par $M_t = e^{-\alpha(\beta)Y_t - \beta t}$ est une martingale continue à droite qui vérifie $0 \leq M_{t\wedge T} \leq e^{\alpha(\beta)z_0}$ pour tout $t \geq 0$. En appliquant le théorème d'arrêt au temps $T$, on obtient $\mathbf{E}[e^{-\beta T}] = e^{-\alpha(\beta)z_0}$. En dérivant par rapport à $\beta$ en 0, on trouve $\mathbf{E}[T] = \alpha'(0)z_0 = \frac{z_0}{\phi'(0)+\kappa} = \frac{z_0}{\kappa-\lambda m}$.

Suggestions de développement :

1. Justifier autant que possible les calculs
2. Pout-on trouver plus simplement $\mathbf{E}[T]$ lorsque $\kappa > \lambda m$ ?
3. Que se passe-t-il quand $\kappa = \lambda m$ ?
4. Déterminer $\alpha$ et $\alpha(\beta)$ lorsque les variables aléatoires $\xi_n$ sont de loi exponentielle.

# 4 Etude du régime stationnaire

Dans cette section, nous remplaçons la constante $z_0$ par une variable aléatoire $Z_0$. On peut montrer que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Markov dans la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ où $\mathcal{F}_t = \sigma(Z_0) \vee \sigma((Y_s)_{0\leq s\leq t})$. Lorsque $\kappa > \lambda m$, ce processus est positivement récurrent et nous allons rechercher une mesure invariante.

Commençons par remarquer que l'encadrement $0 \leq Z_t \leq Z_0 + Y_t$ montre que $Z_t$ est intégrable pour tout $t \geq 0$ pourvu que $Z_0$ le soit. En écrivant pour $t \geq 0$ et $h > 0$

$$\frac{Z_{t+h} - Z_t}{h} = \frac{(Z_t - \kappa h)_+ - Z_t}{h} + \frac{X_{t+h} - X_t}{h},$$

on montre que l'application $t \mapsto \mathbf{E}[Z_t]$ est dérivable à droite à l'instant $t$, de dérivée $-\kappa P[Z_t > 0] + \lambda m$. Pour que $\mathbf{E}[Z_t]$ soit un réel constant, il faut et il suffit donc que $P[Z_t > 0] = \frac{\lambda m}{\kappa}$ pour tout $t \geq 0$.

On peut faire un raisonnement analogue sur les transformées de Laplace. Si $\theta > 0$, on peut décomposer $\mathbf{E}[e^{-\theta Z_{t+h}} - e^{-\theta Z_t}]$ en intégrales sur les événements $[N_{t+h} - N_t = 0]$, $[N_{t+h} - N_t = 1]$ et $[N_{t+h} - N_t \geq 2]$. En écrivant que

$Z_{t+h} = (Z_t - \kappa h)_+$ sur l'événement $[N_{t+h} - N_t = 0]$,

$Z_t + \xi_{N_t+1} - \kappa h \leq Z_{t+h} \leq Z_t + \xi_{N_t+1}$ sur l'événement $[N_{t+h} - N_t = 1]$,

$|e^{-\theta Z_{t+h}} - e^{-\theta Z_t}| \leq 1$ sur l'événement $[N_{t+h} - N_t \geq 2]$,

et en utilisant l'indépendance des variables aléatoires $Z_t$, $N_{t+h} - N_t$ et $\xi_{N_t+1}$, on obtient que l'application $t \mapsto \mathbf{E}[e^{-\theta Z_t}]$ est dérivable à droite à l'instant $t$, de dérivée

$$\kappa\theta \mathbf{E}[e^{-\theta Z_t} \mathbf{I}_{[Z_t>0]}] + \lambda(\psi(\theta) - 1)\mathbf{E}[e^{-\theta Z_t}] = (\kappa\theta + \phi(\theta))\mathbf{E}[e^{-\theta Z_t}] - \kappa\theta P[Z_t = 0].$$

Si le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est stationnaire, alors la transformée de Laplace de $Z_t$ est donnée par

$$\mathbf{E}[e^{-\theta Z_t}] = \frac{\kappa\theta}{\kappa\theta + \phi(\theta)} P[Z_t = 0].$$

En particulier, en faisant tendre $\theta$ vers 0, on obtient

$$1 = \frac{\kappa}{\kappa + \phi'(0)} P[Z_t = 0] = \frac{\kappa}{\kappa - \lambda m} P[Z_t = 0].$$

On retrouve que $P[Z_t = 0] = 1 - \frac{\lambda m}{\kappa}$ , mais cette fois sans avoir supposé que $Z_0$ est intégrable. Finalement, la transformée de Laplace de $Z_t$ en régime stationnaire est donnée par

$$\mathbf{E}[e^{-\theta Z_t}] = \frac{(\kappa - \lambda m)\theta}{\kappa\theta + \phi(\theta)}.$$

Suggestions de développement :

1. Justifier autant que possible les calculs
2. Calculer $\mathbf{E}[e^{-\theta Z_t}]$ en régime stationnaire lorsque les variables $\xi_n$ sont de loi exponentielle de paramètre $1/m$, notée $\mathcal{E}(1/m)$. En déduire que $Z_t$ a alors pour loi
$$(1 - \frac{\lambda m}{\kappa})\ \delta_0\ + \frac{\lambda m}{\kappa} \mathcal{E}(\frac{\kappa - \lambda m}{\kappa m}).$$
3. Calculer $\mathbf{E}[Z_t]$ en régime stationnaire lorsque les variables $\xi_n$ sont de carré intégrable.
4. Peut-on trouver un régime stationnaire lorsque $\kappa < \lambda m$ ; et lorsque $\kappa = \lambda m$ ?