Désintégrations radioactives

Université de Grenoble - Préparation à l'agrégation

Christophe Leuridan

On souhaite estimer la période de demi-vie d'un atome radioactif en observant un grand nombre n d'atomes identiques. On étudie plusieurs méthodes.

1 Le modèle

On suppose que les durées de vie des atomes sont des variables aléatoires $T_1, \ldots, T_n$ indépendantes et de même loi.

On fait l'hypothèse d'absence de mémoire suivante : sachant qu'un atome de durée de vie T ne s'est toujours pas désintégré au bout d'une durée $t > 0$, la durée de vie résiduelle $T - t$ suit la même loi que la durée de vie T ne sachant rien.

Cette hypothèse entraîne que T suit une loi exponentielle de paramètre θ à préciser. On note $\mathcal{E}(\theta)$ cette loi. Le paramètre θ a plusieurs interprétations puisque les quantités suivantes s'expriment simplement en fonction de θ :
- le taux de désintégration qui est la limite de $P_\theta[T \leq h]/h$ quand $h \to 0$.
- la durée de vie moyenne $\mathbf{E}_\theta[T]$.
- la durée de demi-vie, c'est-à-dire la médiane de T.

Nous allons voir dans la suite comment estimer θ.

Suggestions de développement

1. Expliquer pourquoi les lois exponentielles sont les seules lois pour lesquelles on a la propriété d'absence de mémoire.
2. Calculer les quantités ci-dessus en fonction de θ.
3. Préciser l'affirmation suivante : « la demi-vie est la durée au bout de laquelle la moitié des atomes se sont désintégrés ».

2 Observations à durée illimitée

Si l'on observe les durées de vie $T_1, \ldots, T_n$, on voit facilement que l'estimation du maximum de vraisemblance donne

$$\frac{1}{\hat{\theta}_1} = \frac{S_n}{n} \quad \text{avec} \quad S_n = T_1 + \ldots + T_n.$$

On obtient ainsi un estimateur sans biais de $1/\theta$, mais un estimateur biaisé de θ. On construit un intervalle de confiance en remarquant que $2\theta T_1$ suit la loi $\mathcal{E}(1/2)$, qui est aussi la loi du chi-deux à 2 degrés de liberté. Par conséquent $2\theta(T_1 + \ldots + T_n)$ suit la loi du chi-deux à $2n$ degrés de liberté. Notons $[c_1, c_2]$ un intervalle de $\mathbf{R}_+$ de probabilité $1 - \alpha$ pour cette loi. Alors

$$P_\theta\big[\theta \in [c_1/2S_n, c_2/2S_n]\big] = P_\theta\big[2\theta(T_1 + \ldots + T_n) \in [c_1, c_2]\big] = 1 - \alpha,$$

ce qui fournit un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$.

Mais cette méthode nécessite d'attendre un temps égal à $M_n = \max(T_1, \ldots, T_n)$ pour observer toutes les désintégrations. Ce temps peut être très long si le nombre d'atomes est important, surtout si la durée de demi-vie est élevée. Un calcul simple à l'aide des fonctions de répartition montre en effet les résultats suivants.

Proposition 1

Quand $n \to +\infty$, $\theta M_n - \ln n$ tend en loi vers la loi de Gumbel, dont la fonction de répartition est $F : x \mapsto e^{-e^{-x}}$.

Quand $n \to +\infty$, $\theta M_n / \ln n$ tend vers 1 en probabilité.

Suggestions de développement

1. Justifier l'estimation du maximum de vraisemblance et calculer les biais.
2. Justifier le calcul d'un intervalle de confiance. Comment peut-on choisir l'intervalle ?
3. Justifier les convergences énoncées dans la propriété 1. On pourra même montrer une convergence presque sûre en montrant d'abord que $\theta M_{2^n}/(n \ln 2) \to 1$ p.s..

3 Observations à durée limitée

Pour éviter d'avoir à attendre trop longtemps, une autre méthode consiste à s'arrêter une fois qu'on a observé un nombre fixé d de désintégrations.

Notons $(T_{(1)}, \ldots, T_{(n)})$ la statistique d'ordre associée à $(T_1, \ldots, T_n)$. En appliquant la formule de changement de variables à partir de la loi de $(T_{(1)}, \ldots, T_{(n)})$, on montre assez facilement le résultat suivant.

Proposition 2 *Le n-uplet*

$$(nT_{(1)}, (n-1)(T_{(2)} - T_{(1)}), \ldots, 2(T_{(n-1)} - T_{(n-2)}), T_{(n)} - T_{(n-1)})$$

est un échantillon de la loi $\mathcal{E}(\theta)$.

L'estimation du maximum de vraisemblance connaissant les instants $T_{(1)} \leq \ldots \leq T_{(d)}$ où ont lieu les d premières désintégrations donne donc

$$\frac{1}{\hat{\theta}_2} = \frac{1}{d}\Big(nT_{(1)} + \sum_{k=2}^{d}(n-k+1)(T_{(k)} - T_{(k-1)})\Big) = \frac{1}{d}\Big(T_{(1)} + \cdots + T_{(d-1)} + (n-d+1)T_{(d)}\Big).$$

Suggestions de développement

1. Justifier la proposition 2.
2. Comment montrer simplement que $T_{(1)}$ suit la loi $\mathcal{E}(n\theta)$? Comment justifier heuristiquement l'indépendance des durées $T_{(1)}, T_{(2)}-T_{(1)}, \ldots, T_{(n)}-T_{(n-1)}$ et déterminer leurs lois respectives ?
3. Justifier l'estimation du maximum de vraisemblance et montrer qu'on obtient un estimateur sans biais de $1/\theta$. Comment a-t-on intérêt à choisir d ?
4. Simuler un échantillon de la loi exponentielle de paramètre 1 et représenter graphiquement les estimations de $1/\theta$ obtenues en fonction de d.

4 Observations à durée fixe

Une autre méthode consiste à observer les désintégrations jusqu'à un temps fixe t.

Le nombre N_t de d'atomes encore présents à l'instant t suit une loi binomiale de paramètres n et $e^{-\theta t}$ et un estimateur sans biais de $e^{-\theta t}$ est N_t/n, ce qui fournit l'estimation de θ suivante :

$$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{t}\ln(n/N_t).$$

Mais cette estimation ne tient pas compte des instants auxquels les désintégrations ont eu lieu. Ce qu'on observe en effet est non seulement le nombre $D_t = n - N_t$ de désintégrations mais aussi les instants $T_{(1)} \leq \ldots \leq T_{(D_t)}$ où elles surviennent.

Pour tout $d \in [0 \ldots n]$, notons $S_d = \{(t_1, \ldots, t_d) \in \mathbf{R}^d : 0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_d \leq t\}$ et λ_d la mesure de Lebesgue sur S_d. Par convention, S_0 est un singleton et λ_0 est la masse de Dirac sur l'unique élément de S_0. La variable aléatoire $(T_{(1)}, \ldots, T_{(D_t)})$ est à valeurs dans la réunion des S_d pour $0 \leq d \leq n$. On détermine sa densité par rapport à la mesure $\lambda_0 + \cdots + \lambda_n$ en écrivant que pour tout $d \in [0 \ldots n]$ et pour tout borélien B de S_d,

$$\begin{aligned}
P[(T_{(1)}, \ldots, T_{(D_t)}) \in B] &= P[D_t = d \ ; \ (T_{(1)}, \ldots, T_{(d)}) \in B] \\
&= \sum_{\substack{1 \leq i_1, \ldots, i_d \leq n \\ i_1, \ldots, i_d \text{ distincts}}} P[(T_{i_1}, \ldots, T_{i_d}) \in B \ ; \ \forall j \notin \{i_1; \ldots; i_d\}, T_j > t] \\
&= \frac{n!}{(n-d)!} P[(T_1, \ldots, T_d) \in B; T_{d+1} > t \ ; \ldots \ ; \ T_n > t] \\
&= \frac{n!}{(n-d)!} \int_B \theta^d \ e^{-\theta(t_1 + \cdots + t_d + (n-d)t)} \ dt_1 \cdots dt_d.
\end{aligned}$$

On obtient donc l'expression de la vraisemblance

$$L_\theta(t_1, \ldots, t_d) = \frac{n!}{(n-d)!} \theta^d \ e^{-\theta(t_1 + \cdots + t_d + (n-d)t)}$$

pour $d \in [0 \ldots n]$ et $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_d \leq t$. L'estimation du maximum de vraisemblance donne ainsi

$$\frac{1}{\hat{\theta}_4} = \frac{1}{D_t}(T_{(1)} + \cdots + T_{(D_t)} + (n - D_t)t) = \frac{1}{D_t} \sum_{k=1}^{n} \min(T_k, t).$$

On remarque que cette estimation comme la précédente donne $\theta = 0$ si $D_t = 0$. Mais cela ne se produit qu'avec la probabilité $e^{-n\theta t}$.

Suggestions de développement

1. Donner un intervalle de confiance pour $e^{-\theta t}$ en fonction de N_t. Comment a-t-on intérêt à choisir t pour estimer θ ?
2. Dans une datation au carbone 14 d'un morceau de bois fossile, on connaît la durée de demi-vie de l'atome de ${}^{14}C$ (5730 ans), et la proportion initiale d'isotopes ${}^{14}C$ parmi les atomes de carbone $(1,2 \times 10^{-12})$ et on cherche à estimer t en mesurant la proportion résiduelle d'isotopes ${}^{14}C$ par une spectrographie de masse. Donner un intervalle de confiance pour t si l'on compte 500 atomes de ${}^{14}C$ représentant une proportion résiduelle de 3×10^{-13}.
3. Justifier le calcul de la vraisemblance et l'estimation du maximum de vraisemblance. Comment a-t-on intérêt à choisir t ?
4. Simuler un échantillon de la loi exponentielle de paramètre 1 et représenter graphiquement les estimations de $1/\theta$ obtenues en fonction de t.