Université Joseph Fourier

Licence de Mathématiques, 2013-2014
Topologie A

CC1, jeudi 10 octobre 2013, durée : 2 heures, 14h-16h

Documents et calculatrices sont interdits.
Les exercices peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Autour du cours

(1) Soit A l'ensemble des réels dont le développement décimal propre est de la forme $x = 0,59a_3 9a_5 a_6 \ldots$. Déterminer $\sup A$ et $\inf A$. Les bornes sont elles atteintes dans A ? *Rappel : un développement décimal est dit propre s'il ne se termine pas par une suite de* 9.

(2) Soient I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Que signifie "la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I" ? Que signifie "la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I" ?

(3) Montrer que toute fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue (*le théorème de Heine*).

Exercice 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$, et $f'(1) = 0$. Montrer que f a un point fixe. *Rappel : $a \in [0,1]$ est un point fixe de f si $f(a) = a$. Indication : considérez la fonction $g(x) = f(x) - x$.*

Exercice 2

(1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1,1]$, on pose

$$f_n(x) = \sin(nx)\exp(-nx^2) + \sqrt{1-x^2}\,.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle simplement sur $[-1,1]$? Montrer que pour tout $a \in]0,1[$ elle converge uniformément sur $[-1,-a] \cup [a,1]$. Converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

(2) Donner un exemple d'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ qui converge simplement sur $[0,1]$ et telle que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt \neq \int_0^1 (\lim_{n\to+\infty} f_n(t))dt\,.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément ?

Indication : On pourra choisir les fonctions f_n affines par morceaux, positives, d'intégrale constante, et telles que la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit presque partout nulle.

Exercice 3

Soit A une partie non vide du segment $[0, 1]$. Le but de ce problème est de montrer qu'on peut trouver une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que tout élément $a \in A$ est une valeur d'adhérence de cette suite.

(a) Étant donné un entier naturel $m > 1$, on considère la partition de $[0, 1]$ en m segments de longueur $1/m$, et pour chaque segment de la partition qui comporte un point de A, au moins, on fixe un tel point. Montrer que ce procédé nous permet de construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A vérifiant la condition requise.

(b) Est-il vrai que toute valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite dans la question (a) soit contenu dans A ? Justifier la réponse.

Exercice 4

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si tout réel est limite d'une suite de réels appartenant à A. Le but de ce problème est de montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p + q\sqrt{2}$ où p et q parcourent $\mathbb{Z}$, est dense dans $\mathbb{R}$. (*Attention : nous n'utiliserons pas ici le résultat de l'exercice vu en TD sur les sous-groupes de* $\mathbb{R}$.)

(1) Montrer que D est stable par addition et multiplication.

(2) Posons $u = \sqrt{2} - 1$. Montrer que, pour tous les réels a et b tels que $a < b$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < u^n < b - a$. Étant donne un tel n, montrer alors qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a < mu^n < b$. En déduire le résultat.