Fonctions de Bessel

Soit $\nu \in \mathbf{R}_+$. On étudie l'équation différentielle de Bessel

$$(\mathcal{B}_\nu) \quad t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0.$$

1 Étude sur $\mathbf{R}_+^*$

Soit $\varphi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ dérivable.

1. Montrer que φ est solution de $(\mathcal{B}_\nu)$ si et seulement si l'application (φ, φ') de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$ est solution d'une équation différentielle de la forme $Y' = A(t)Y$, pour une application $A : \mathbf{R}_+^* \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ qu'on précisera. On identifie ici $\mathbf{R}^2$ à $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$.
2. En déduire les solutions de $(\mathcal{B}_\nu)$ sur l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$ forment un plan vectoriel.
3. Soit $\psi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ définie par $\psi(t) = t^{1/2}\varphi(t)$. Montrer que φ est solution de $(\mathcal{B}_\nu)$ si et seulement si ψ est solution de l'équation

$$(\mathcal{E}_\nu) \quad z'' + \Big(1 + \frac{1/4 - \nu^2}{t^2}\Big)z = 0.$$

4. En déduire les solutions de $(\mathcal{B}_{1/2})$.
5. Dans cette question, on fixe une solution non identiquement nulle φ de $(\mathcal{B}_\nu)$, on définit ψ comme ci-dessus.
   (a) Montrer que les fonctions ψ et ψ' n'ont pas de zéro commun.
   (b) On fixe un nombre complexe c tel que $\exp(c) = \psi(1) + i\psi'(1)$ et on définit l'application $\Lambda : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}$ par

$$\Lambda(t) = c + \int_1^t \frac{\psi'(s) + i\psi''(s)}{\psi(s) + i\psi'(s)}\mathrm{d}s.$$

   Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $\exp(\Lambda(t)) = \psi(t) + i\psi'(t)$. On pourra dériver la fonction $\exp(-\Lambda)\big(\psi + i\psi'\big)$.
   (c) En majorant $|\Lambda(t) + i|$, montrer l'existence d'une constante $\ell \in \mathbf{C}$ telle que pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $|\Lambda(t) + it - \ell| \leq |\nu^2 - 1/4|t^{-1}$.
   (d) On pose $\ell = \sigma_0 + i\theta_0$ avec σ_0 et θ_0 dans $\mathbf{R}$. Montrer que quand t tend vers $+\infty$, on a

$$\varphi(t) = e^{\sigma_0}\cos(\theta_0 - t)t^{-1/2} + O(t^{-3/2}),$$
$$\varphi'(t) = e^{\sigma_0}\sin(\theta_0 - t)t^{-1/2} + O(t^{-3/2}).$$

2 Solutions développables en série entière

Soit $\varphi :]-R, R[\to \mathbf{R}$ une fonction développable en série entière au voisingage de 0 et $R > 0$ le rayon de convergence :

$$\forall t \in]-R, R[, \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

1. Donner l'expression de $t^2\varphi''(t) + t\varphi'(t) + (t^2 - \nu^2)\varphi(t)$ sous forme de série entière en la variable t. En déduire les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ pour que φ soit une solution de $(\mathcal{B}_\nu)$.
2. Lorsque $\nu \notin \mathbf{N}$, montrer que la fonction nulle est la seule solution de $(\mathcal{B}_\nu)$ développable en série entière au voisinage de 0.
3. Lorsque $\nu \in \mathbf{N}$, montrer que les solutions de $(\mathcal{B}_\nu)$ développables en série entière au voisingage de 0 sont exactement les multiples de la fonction J_ν définie par

   $$\forall t \in \mathbf{R}, \quad J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

   Indication : lorsque $\nu = 2p$ avec $p \in \mathbf{N}$, on montrera que les conditions de la question 1 s'écrivent

   (a) $\forall k \geq 0,\ a_{2k+1} = 0\,;$

   (b) $\forall k \in [\![0, p-1]\!],\ a_{2k} = 0\,;$

   (c) $\forall k \geq p,\ a_{2k} = a_{2p}\left(\frac{-1}{4}\right)^{k-p}\frac{(2p)!}{(k-p)!(k+p)!}.$
4. Soient Θ une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$ et φ la fonction caractéristique de la variable aléatoire $Y := \sin\Theta$. Montrer que $\varphi = J_0$. Indication : on montrera que

   $$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}[Y^n]\frac{(it)^n}{n!}.$$

   et on pourra utiliser sans preuve la formule de Wallis

   $$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^{2k}\theta \; \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2k)!}{2^{2k}k!^2}.$$

Un corrigé

Étude sur $\mathbf{R}_+^*$

1. Pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, notons
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{t^2-\nu^2}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}.$$
Alors
$$\begin{aligned} \varphi \text{ est solution de } (\mathcal{B}_\nu) &\iff \forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad \begin{cases} \varphi'(t) = 0\varphi(t) + 1\varphi'(t) \\ \varphi''(t) = -\frac{t^2-\nu^2}{t^2}\varphi(t) - \frac{1}{t}\varphi'(t) \end{cases} \\ &\iff \forall t \in \mathbf{R}_+^*, \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} \\ &\iff (\varphi, \varphi') \text{ est solution de } (\mathcal{B}_\nu). \end{aligned}$$

2. L'application $A : \mathbf{R}_+^* \to \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ est continue, donc le théorème de Cauchy Lipschitz linéaire assure que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{B}_\nu)$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est un plan vectoriel. Il en est de même pour l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_\nu)$ sur $\mathbf{R}_+^*$ puisque la transformation qui envoie toute solution ϕ de $(\mathcal{B}_\nu)$ sur (φ, φ') est un isomorphisme entre ces deux espaces vectoriels. L'isomorphisme réciproque envoie toute solution (φ, ψ) de $(\mathcal{E}_\nu)$ sur φ.
3. Soit $\psi : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ définie par $\psi(t) = t^{1/2}\varphi(t)$. D'après la formule de Leibniz, on a pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,
$$\begin{aligned} \varphi(t) &= t^{-1/2}\psi(t), \\ \varphi'(t) &= t^{-1/2}\psi'(t) - \frac{1}{2}t^{-3/2}\psi(t), \\ \varphi''(t) &= t^{-1/2}\psi''(t) - t^{-3/2}\psi'(t) + \frac{3}{4}t^{-5/2}\psi(t). \end{aligned}$$
Donc
$$\begin{aligned} t^2\varphi''(t) + t\varphi'(t) + (t^2-\nu^2)\varphi(t) &= t^{3/2}\psi''(t) + (-t^{1/2} + t^{1/2})\psi'(t) \\ &\quad + \Big(\frac{3}{4}t^{-1/2} - \frac{1}{2}t^{-1/2} + (t^2-\nu^2)t^{-1/2}\Big)\psi(t) \\ &= t^{3/2}\psi''(t) + \Big(\frac{1}{4} + (t^2-\nu^2)\Big)t^{-1/2}\psi(t) \\ &= t^{3/2}\Big(\psi''(t) + \Big(1 + \frac{1/4-\nu^2}{t^2}\Big)\psi(t)\Big) \end{aligned}$$
Ainsi, φ est solution de $(\mathcal{B}_\nu)$ si et seulement si ψ est solution de l'équation $(\mathcal{E}_\nu)$.
4. L'équation $(\mathcal{E}_{1/2})$ s'écrit $z'' + z = 0$. Ses solution sont les fonctions $\alpha\cos + \beta\sin$ avec α, β constantes réelles. D'après la question précédente, les solutions de $(\mathcal{B}_{1/2})$ sont donc les fonctions $t \mapsto t^{-1/2}(\alpha\cos t + \beta\sin t)$.
5. Soit φ une solution non identiquement nulle de $(\mathcal{B}_\nu)$ et ψ comme ci-dessus.
   (a) Si ψ et ψ' avaient un zéro commun, ce serait aussi un zéro commun de φ et φ', donc un zéro de (φ, φ'). D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, cette solution de l'équation différentielle $Y' = A(t)Y$ serait nulle, ce qui contredit l'hypothèse. Donc ψ et ψ' n'ont pas de zéro commun.

(b) Par construction, Λ est dérivable de dérivée $\Lambda' = (\psi' + i\psi'')/(\psi + i\psi')$. Donc

$$\Big(\exp(-\Lambda)\big(\psi + i\psi'\big)\Big)' = \exp(-\Lambda)\Big(- \Lambda'\big(\psi + i\psi'\big) + \big(\psi' + i\psi''\big)\Big) = 0.$$

La fonction $\exp(-\Lambda)\big(\psi + i\psi'\big)$ est constante, égale à 1, puisque $\exp(c) = \psi(1) + i\psi'(1)$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$, $\exp(\Lambda(t)) = \psi(t) + i\psi'(t)$.

(c) Pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}
\Lambda'(t) + i &= \frac{\psi'(t) + i\psi''(t)}{\psi(t) + i\psi'(t)} + i \\
&= \frac{i\psi''(t) + i\psi(t)}{\psi(t) + i\psi'(t)} \\
&= \frac{\nu^2 - 1/4}{t^2} \times \frac{i\psi(t)}{\psi(t) + i\psi'(t)},
\end{aligned}$$

car ψ est solution de $(\mathcal{E}_\nu)$. Comme $\psi(t)$ et $\psi'(t)$ sont réels, Donc

$$|\Lambda'(t) + i| = \frac{|\nu^2 - 1/4|}{t^2} \times \frac{\psi(t)}{(\psi^2(t) + \psi'^2(t))^{1/2}} \leq \frac{|\nu^2 - 1/4|}{t^2}.$$

Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} (\Lambda'(t) + i)\mathrm{d}t$ converge absolument, et $\Lambda(t) + it$ a une limite quand t tend vers $+\infty$. Notons ℓ cette limite. Alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\ell - (\Lambda(t) + it) = \int_t^{+\infty} (\Lambda'(s) + i)\mathrm{d}s,$$

donc

$$|\Lambda(t) + it - \ell| \leq \int_t^{+\infty} |\Lambda'(s) + i|\mathrm{d}s \leq \int_t^{+\infty} \frac{|\nu^2 - 1/4|}{s^2}\mathrm{d}s = \frac{|\nu^2 - 1/4|}{t}.$$

(d) Quand t tend vers $+\infty$, on a $\Lambda(t) + it = \sigma_0 + i\theta_0 + O(t^{-1})$ donc par différentiabilité de l'exponentielle complexe $\psi(t)e^{it} = e^{\sigma_0}e^{i\theta_0} + O(t^{-1})$ En multipliant par e^{-it} et en prenant les parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\varphi(t) = e^{\sigma_0}\cos(\theta_0 - t)t^{-1/2} + O(t^{-3/2}),$$

$$\varphi'(t) = e^{\sigma_0}\sin(\theta_0 - t)t^{-1/2} + O(t^{-3/2}).$$

Solutions développables en série entière

1. On sait qu'on peut dériver terme à terme les séries entières dans l'intervalle ouvert de convergence. Pour tout $t \in]-R, R[$,

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

$$\varphi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n t^{n-1},$$

$$\varphi''(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

En utilisant le fait que na_nt^n est nul si $n=0$ et $n(n-1)a_nt^n$ est nul si $n \in \{0,1\}$, on a donc

$$\begin{aligned} t^2\varphi''(t)+t\varphi'(t)+(t^2-\nu^2)\varphi(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_nt^n + \sum_{n=1}^{+\infty} na_nt^n \\ &\quad + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}t^n - \nu^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_nt^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \big((n^2-\nu^2)a_n + 1_{[n\geq 2]}a_{n-2}\big)t^n \end{aligned}$$

Donner l'expression de $t^2\varphi''(t)+t\varphi'(t)+(t^2-\nu^2)\varphi(t)$ sous forme de série entière en la variable t. Pour que φ soit une solution de $(\mathcal{B}_\nu)$, il faut et il suffit donc que $(n^2-\nu^2)a_n = 0$ pour tout $n \in \{0,1\}$ et $(n^2-\nu^2)a_n = -a_{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

2. Si $\nu \notin \mathbf{N}$, alors $n^2-\nu^2 \neq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, donc les conditions ci-dessus se réécrivent $a_0 = a_1 = 0$ et $a_n = -a_{n-2}/(n^2-\nu^2)$ pour tout $n \geq 2$. La seule suite $(a_n)_{n\geq 0}$ vérifiant ces conditions est la suite nulle. Donc la fonction nulle est la seule solution de $(\mathcal{B}_\nu)$ développable en série entière au voisingage de 0.
3. On vérifie d'abord que la série entière définissant J_ν a un rayon de convergence infini. Pour tout $t \in \mathbf{R}^*$, la série définissant $J_\nu(t)$ converge absolument d'après le critère de d'Alembert puisque

$$\frac{|t/2|^{2n+2+\nu}}{(n+1)!(n+1+\nu)!}\Big/\frac{|t/2|^{2n+\nu}}{n!(n+\nu)!} = \frac{t^2}{4(n+1)(n+1+\nu)} \to 0 \text{ quand } n \to +\infty.$$

Si $\nu = 2p$ avec $p \in \mathbf{N}$, les conditions de la question 1 sont équivalentes à
(a) $a_1 = 0$;
(b) $a_0 = a_{2p-2} = 0$ si $p \neq 0$;
(c) $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0,1,2p\}$, $a_n = -a_{n-2}/\big((n-2p)(n+2p)\big)$.

On vérifie que ces conditions sont équivalentes à
(a) $\forall k \geq 0$, $a_{2k+1} = 0$;
(b) $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $a_{2k} = 0$;
(c) $\forall k \geq p+1$, $a_{2k} = \dfrac{-a_{2k-2}}{4(k-p)(k+p)}$.

La dernière de ces conditions équivaut à

$$\forall k \geq p, a_{2k} = a_{2p}\Big(\frac{-1}{4}\Big)^{k-p}\frac{(2p)!}{(k-p)!(k+p)!}.$$

Ainsi, les solutions de $(\mathcal{B}_\nu)$ développables en série entière sont les fonctions de la forme

$$\varphi(t) = 4^p(2p)!a_{2p}\sum_{k=p}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-p}t^{2k}}{4^k(k-p)!(k+p)!} = 4^p(2p)!a_{2p}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+2p}}{2^{2k+2p}k!(2k+p)!}.$$

avec $a_{2p} \in \mathbf{R}$ quelconque, autrement dit les multiples de $J_{2p} = J_\nu$.
On effectue un raisonnement analogue si $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbf{N}$.

4. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\varphi(t) = \mathbf{E}[e^{itY}] = \mathbf{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(itY)^n}{n!}\Big] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{E}\Big[\frac{(itY)^n}{n!}\Big],$$

l'interversion de la somme et de l'espérance étant justifiée par le théorème de Fubini. En effet, la variable aléatoire $Y := \sin\Theta$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, donc

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} \Big|\frac{(itY)^n}{n!}\Big|\Big] \leq \mathbf{E}\Big[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|t|^n}{n!}\Big] = \mathbf{E}[e^{|t|}] = e^{|t|} < +\infty.$$

Or pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{E}[Y^n] = \mathbf{E}[\sin^n \Theta] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^n \theta \, \mathrm{d}\theta.$$

Si n est impair, on trouve $\mathbf{E}[Y^n] = 0$ par imparité. Or pout tout $k \in \mathbf{N}$, la parité et la formule de l'énoncé donnent

$$\mathbf{E}[Y^n] = \mathbf{E}[Y^{2k}] = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{(2k)!}{2^{2k} k!^2}.$$

Ainsi,

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{E}[Y^{2k}] \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{2^{2k} k!^2} = J_0(t).$$