Algèbre L3A - Seconde session

Durée: 4h - *Aucun document autorisé*

Exercice 1. Soit G un groupe.

1. Montrer que l'on définit une action de $\mathrm{Aut}(G)$ sur G en posant

$$\varphi * g = \varphi(g) \ \text{ pour tout } \varphi \in \mathrm{Aut}(G) \ \text{ et tout } \ g \in G.$$

2. Justifier que l'action de $\mathrm{Aut}(G)$ sur G se restreint en une action sur l'ensemble $G \setminus \{1_G\}$.

On suppose maintenant que G est un groupe fini non trivial. On veut démontrer que $\mathrm{Aut}(G)$ agit transitivement sur $G \setminus \{1_G\}$ si et seulement s'il existe un nombre premier p et un entier $m \geq 1$ tels que $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$.

3. On suppose que $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$, où p est premier et $m \geq 1$. On rappelle que $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{GL}_m(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ agit transitivement sur $G \setminus \{1_G\}$.

On suppose maintenant que que G est un groupe fini non trivial tel que $\mathrm{Aut}(G)$ agit transitivement sur $G \setminus \{1_G\}$.

4. Montrer que tous les éléments de $G \setminus \{1_G\}$ ont même ordre.

5. En déduire qu'il existe un nombre premier p et un entier $m \geq 1$ tels que G soit d'ordre p^m, et que tous les éléments de $G \setminus \{1_G\}$ sont d'ordre p.

6. Justifier l'existence d'un élément de $z \in Z(G) \setminus \{1_G\}$. Montrer alors que G est abélien.

7. Montrer que l'application $(\overline{m}, g) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times G \mapsto g^m \in G$ est bien définie. On admet que cette application induit sur G une structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-espace vectoriel.

8. En déduire qu'il existe $m \geq 1$ tel que $G \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^m$.

Exercice 2. Soit p un nombre premier. On note $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Factoriser $X^p - X$ dans $K[X]$.

2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si $u^p - u = 0$.

3. Montrer que u est trigonalisable si et seulement si $u^p - u$ est nilpotent.

Exercice 3. Soient p, q, r trois nombres premiers, avec $p < q < r$, et soit G un groupe d'ordre pqr. Si $\ell = p, q$ ou r, on note N_ℓ le nombre de ℓ-Sylow.

1. Montrer que $N_p = 1$ ou $N_p \geq q$.

2. Montrer que $N_r = 1$ ou $N_r = pq$.

3. En comptant le nombre d'éléments d'ordre p, q, r, montrer que

$$N_p(p-1) + N_q(q-1) + N_r(r-1) \leq pqr - 1.$$

4. En déduire que G n'est pas simple.

Suite de l'énoncé au dos !

Exercice 4. Soit $A = \{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(0) \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que A est un anneau intègre et $A^{\times} = \{\pm 1\}$.

2. Montrer que si $P \in A$ et $P(0) = 0$, alors $m \mid P$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$ non nul.

3. Montrer que si p est un nombre premier, alors p est irréductible dans A.

4. Déduire des questions précédentes que X possède une infinité de diviseurs irréductibles deux à deux non associés. L'anneau A est-il euclidien ? (justifier très soigneusement!)

5. Pour $n \geq 1$, on note $I_n = \left(\dfrac{X}{2^n}\right) = \dfrac{X}{2^n}A$. Soit $I = \displaystyle\bigcup_{n \geq 1} I_n$.

(a) Montrer que I est un idéal de A.

On se propose de montrer par l'absurde que I n'est pas principal. Soit $P \in A$ tel que $I = (P)$.

(b) Justifier qu'il existe $n \geq 1$ et $Q \in A$ tels que $P = \dfrac{X}{2^n}Q$.

(c) Montrer que Q est constant non nul.

(d) Conclure en utilisant le fait que $\dfrac{X}{2^{n+1}} \in I$.