ALGÈBRE L3A - EXAMEN FINAL, 2NDE SESSION (DURÉE: 4H)

DOCUMENTS, PORTABLES ET CALCULATRICES INTERDITS

Conseil : Les questions 5 et 6 de l'exercice 1 sont données par souci d'avoir un énoncé complet. Comme l'énoncé est long, il est souhaitable de se concentrer sur les autres questions, ainsi que sur l'exercice 2 et le problème.

Exercice 1. Soit K un corps, soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

Si F est un sous-espace de E stable par u, on note u_F l'endomorphisme de F induit par u.

1. Montrer qu'il existe deux sous-espaces F et G stables par u tels que $E = F \oplus G$, u_F est inversible, et u_G est nilpotent.

Indication. Remarquer que $\chi_u = X^m Q$, avec $Q(0) \neq 0$ et $m \geq 0$, et utiliser le lemme des noyaux.

2. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(u^n) \oplus \mathrm{Im}(u^n)$.

3. Donner un exemple de K-espace vectoriel E et d'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $E \neq \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Dans toute la suite, K est un corps possédant q éléments. Le but ultime des questions suivantes est de calculer le nombre d'endomorphismes nilpotents de E.

4.

a) Justifier brièvement que deux K-espaces espaces vectoriels de même dimension n ont même nombre de sous-espaces de dimension fixée, même nombre d'endomorphismes nilpotents et même nombre d'automorphismes, et que tous ces nombres sont finis.

Pour tout $m \geq 0$, on pose

$$(m)_q = \prod_{i=0}^{m} (q^m - q^i) = (q^m - 1)(q^m - q) \cdots (q^m - q^{m-1})$$

(avec $(0)_q = 1$).

b) Montrer que le nombre de familles libres de k vecteurs dans un K-espace vectoriel de dimension n est égal à $(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{k-1})$

c) En déduire que le nombre de bases d'un K-espace vectoriel de dimension k est $(k)_q$. Quel est le nombre I_k d'automorphismes d'un K-espace vectoriel de dimension k ?

d) Déduire de a) et b) que le nombre de sous-espaces de dimension k d'un K-espace vectoriel de dimension n est égal à $\dfrac{(n)_q}{(k)_q (n-k)_q}$.

5.

a) On se fixe un sous-espace F de E de dimension k. Montrer que le nombre de sous-espaces G tels que $E = F \oplus G$ est égal à
$$q^{n(n-1)/2-k(k-1)/2}.$$

b) En déduire que le nombre de couples (F, G) de sous-espaces de E vérifiant $\dim_K(F) = k$ et $E = F \oplus G$ est égal à
$$q^{n(n-1)/2-k(k-1)/2}\frac{(n)_q}{(k)_q(n-k)_q}.$$

On note N_m le nombre d'endomorphismes nilpotents d'un K-espace vectoriel de dimension m.

6.

a) En utilisant 1., montrer la relation
$$q^{n^2} = \sum_{k=0}^{n} q^{n(n-1)/2-k(k-1)/2}\frac{(n)_q}{(k)_q(n-k)_q}N_k(n-k)_q.$$

b) En déduire $\dfrac{q^{(n^2+n)/2}}{(n)_q} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} N_k\frac{q^{-k(k-1)/2}}{(k)_q}$.

c) En déduire que $\dfrac{q^{(n^2+n)/2}}{(n)_q} = N_n\dfrac{q^{-n(n-1)/2}}{(n)_q} + \dfrac{q^{((n-1)^2+(n-1))/2}}{(n-1)_q}$, et enfin l'égalité $N_n = q^{n^2-n}$.

Exercice 2. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. On rappelle que $Z(\mathrm{O}(E)) = \{\pm \mathrm{Id}_E\}$.

1. Montrer que $\mathrm{O}(E)/\mathrm{O}^+(E) \simeq \{\pm 1\}$.

On suppose qu'il existe un sous-groupe H de $\mathrm{O}(E)$ tel que
$$\mathrm{O}(E) = \mathrm{O}^+(E) \odot H.$$

2. Montrer que $|H| = 2$.

3. Soit $u \in H \setminus \{\mathrm{Id}_E\}$.

a) Montrer que $\langle \mathrm{O}^+(E), u\rangle = \mathrm{O}(E)$.

b) En déduire que u commute avec tous les éléments de $\mathrm{O}(E)$, puis que $u = -\mathrm{Id}_E$.

4. Montrer que si n est pair, un tel sous-groupe H n'existe pas.

5. On suppose que n est impair. Montrer que $\mathrm{O}(E) = \mathrm{O}^+(E) \odot \langle -\mathrm{Id}_E\rangle$.

Problème.

A. Soit G un groupe. On note $[G, G]$ le sous-groupe de G engendré par les éléments

$$[g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}, \quad g_1,\, g_2 \in G.$$

A1. Montrer que $[G, G]$ est distingué dans G, et que $G/[G, G]$ est abélien.

A2. Si H est un sous-groupe distingué dans G tel que G/H est abélien, montrer que $[G, G] \subset H$. Inversement, montrer que si H est un sous-groupe contenant $[G, G]$, alors H est distingué dans G et G/H est abélien.

A3. Montrer que tout morphisme de groupes $G \longrightarrow A$, avec A abélien, induit un morphisme de groupes $G/[G, G] \longrightarrow A$.

A4. Soit G^2 le sous-groupe de G engendré par les éléments $g^2, g \in G$.

a) Montrer qu'un groupe dont tous les éléments sont d'ordre 1 ou 2 est abélien.

b) En déduire que $[G, G] \subset G^2$.

c) On suppose que G est engendré par une partie P ne contenant que des éléments d'ordre 2. Montrer que $[G, G] = G^2$.

Indication. Si $x \in P$ et $g \in G$, que vaut $[x, g]g^2$?

A5. Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 2$.

a) Montrer que $[\mathrm{O}(E), \mathrm{O}(E)] = \mathrm{O}^+(E)$.

b) À l'aide des questions précédentes, montrer qu'il y a au plus deux morphismes de groupes $\mathrm{O}(E) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$.

c) Décrire tous les morphismes de groupes $\mathrm{O}(E) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$.

B. Soit p un nombre premier, et soit G^* le sous-groupe engendré par $[G, G]$ et les éléments $g^p, g \in G$.

B1. Montrer que G^* est distingué dans G, que G/G^* est abélien, et tué par p, i.e. pour tout $\overline{g} \in G/G^*$, on a $\overline{g}^p = \overline{1}$.

On suppose jusqu'à la fin de l'exercice que G est un p-groupe.

B2. Soit $H \neq G$ un sous-groupe. Montrer l'existence d'un sous-groupe de G d'indice p contenant H.

Indication. Procéder par récurrence sur $|G|$.

Si H contient un élément $a \in Z(G)$ non trivial, appliquer l'hypothèse de récurrence à $G/\langle a \rangle$. Si $H \cap Z(G) = \{1_G\}$, choisir un élément $a \in Z(G)$ d'ordre p (après avoir justifié son existence) et considérer $H' = \langle H, a \rangle$. Si H n'est pas d'indice p, montrer que $H' \neq G$ et contient un élément central non trivial.

B3. Soient $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_r$ des générateurs de G/G^*. Montrer que

$$G = \langle x_1, \ldots, x_r \rangle.$$

Indication. Introduire le sous-groupe H engendré par les x_i, et utiliser B2. On pourra utiliser sans démonstration qu'un sous-groupe d'indice p est nécessairement distingué.