

# Quelques présentations des variétés de dimension 3

Christine Lescop\*

15 septembre 1997

## Résumé

Ce texte présente quelques manières de visualiser les variétés de dimension 3, puis introduit brièvement l'invariant de Casson, invariant récent de ces variétés, et quelques travaux de l'auteur sur cet invariant.

Mots-clefs: topologie en dimension 3, variétés de dimension 3, scindements de Heegaard, chirurgie, invariant de Casson

Keywords: 3-dimensional topology, 3-manifolds, Heegaard splittings, surgery, Casson invariant

A.M.S. subject classification: 57N10, 57M25

## 1 Introduction aux variétés de dimension 3

Dans cet exposé, pour un entier naturel  $k$ , nous appelons *k*-variété une variété topologique (à homéomorphisme près), compacte, orientable, connexe, sans bord (sauf précision contraire) de dimension  $k$ .

Avec cette définition que nous expliciterons ultérieurement, nous pouvons donner les listes complètes et sans répétition des 1-variétés et des 2-variétés que nous appelons ici simplement surfaces. La seule 1-variété est le cercle  $S^1$ , et, pour chaque entier naturel  $g$ , il y a exactement une surface: la surface  $\Sigma_g$  de genre  $g$  dessinée sur la figure 2.

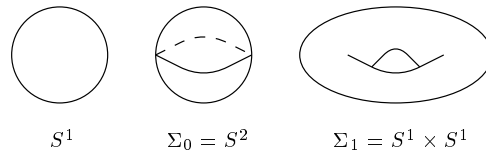


FIG. 1 –  $S^1$ , la sphère  $S^2 = \Sigma_0$  et le tore  $S^1 \times S^1 = \Sigma_1$

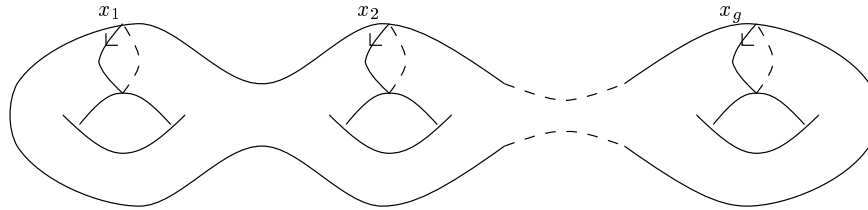


FIG. 2 – La surface de genre  $g$

Pour les 3-variétés, le problème de la classification n'est pas résolu, c'est-à-dire que nous ne connaissons pas de telle liste, et le principal but de la topologie de dimension 3 est d'en fournir une.

Nous disposons pour cela de plusieurs manières de représenter les 3-variétés, nous allons décrire deux d'entre elles, les scindements de Heegaard et les chirurgies. Nous disposons aussi d'invariants, fonctions des 3-variétés dans des ensembles mieux connus (telles le genre pour les surfaces), qui nous permettent souvent de distinguer des 3-variétés différentes. Nous appliquerons nos deux représentations des 3-variétés à deux constructions distinctes d'un même invariant topologique récent des 3-variétés: l'invariant de Casson.

Avant de donner des constructions générales, examinons quelques exemples naturels de 3-variétés.

Notre 3-variété préférée sera la sphère  $S^3$  de dimension 3 de  $\mathbf{R}^4$  :

$$S^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

On peut voir  $S^3$  comme la réunion de deux boules  $B^3$  de dimension 3,  $B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\}$ ,  $B_+^3 = \{x \in \mathbf{R}^4 \cap S^3 \mid x_4 \geq 0\}$  et  $B_-^3 = \{x \in \mathbf{R}^4 \cap S^3 \mid x_4 \leq 0\}$  dont les bords homéomorphes à  $S^2$  sont recollés, c'est-à-dire identifiés l'un à l'autre par un homéomorphisme. Ceci

---

\*CNRS, Institut Fourier (UMR 5582)

s'écrit

$$S^3 = B_+^3 \cup_{S^2} B_-^3.$$

$S^3$  est aussi le compactifié d'Alexandroff de l'espace ambiant  $\mathbf{R}^3$ ,

$$S^3 = \mathbf{R}^3 \cup \{\text{point à l'infini}\}$$

comme nous le montre par exemple l'équation  $B^3 \setminus \{\text{point } 0\} = S^2 \times ]0, 1] = S^2 \times [1, \infty[$ . Ici comme dans tout l'exposé, nous regardons les variétés à homéomorphisme près et le signe  $=$  signifie homéomorphe.

Mentionnons aussi à titre d'exemples les 3-variétés produits  $\Sigma_g \times S^1$ , le groupe de Lie  $SO(3)$  des isométries positives de  $\mathbf{R}^3$  et le quotient  $SO(3)/\mathcal{A}_5$  de  $SO(3)$  par le sous-groupe des isométries positives qui préservent l'icosaèdre régulier.

## 2 Scindements de Heegaard des 3-variétés

Un *corps à g anses* est la 3-variété  $H_g$  à bord bordée par  $\Sigma_g$  que l'on voit sur la figure 2. Il est obtenu à partir de la boule  $B^3$  en lui ajoutant  $g$  anses comme le montre la figure 3, ce qui explique la terminologie.

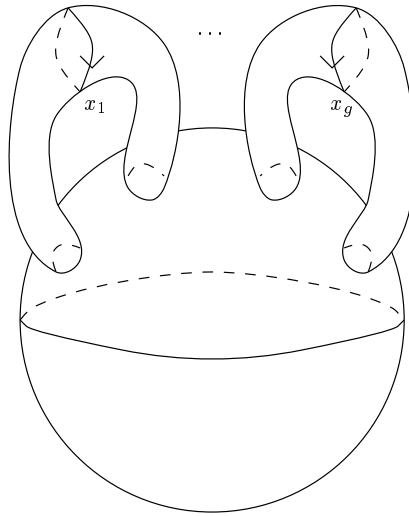


FIG. 3 – Le corps en anses de genre  $g$

**Fait 2.1** Toute 3-variété  $M$  s'écrit

$$M = H_g^{(1)} \cup_{\Sigma_g^{(1)} \xrightarrow{h} \Sigma_g^{(2)}} H_g^{(2)}$$

où  $H_g^{(1)}$  et  $H_g^{(2)}$  sont deux copies de  $H_g$  et  $h$  désigne un homéomorphisme qui identifie le bord  $\partial H_g^{(1)} = \Sigma_g^{(1)}$  de  $H_g^{(1)}$  au bord  $\Sigma_g^{(2)}$  de  $H_g^{(2)}$ .

Ces décompositions des 3-variétés, introduites par Heegaard à la fin du dix-neuvième siècle sont appelées *scindements de Heegaard*. Les remarques qui suivent nous aideront à les dessiner.

Remarquons d'abord que la connaissance complète de l'homéomorphisme  $h$  n'est pas nécessaire à la reconstruction de la variété  $M$ . Il suffit de connaître les courbes images des *méridiens*  $\{x_i^{(2)}\}_{i=1,\dots,g}$  de  $H_g^{(2)}$  par l'homéomorphisme  $h^{-1}$ ,  $h^{-1}(x_i^{(2)}) = y_i$ .

En effet, on reconstruit  $M$  comme suit:

$$M = \left( H_g^{(1)} \cup_{y_i \times I} \left( \cup_{i=1}^g D_{y_i} \times I \right) \right) \cup_{S^2} B^3$$

C'est-à-dire que l'on obtient  $M$  en collant d'abord à  $H_g^{(1)}$  chaque cylindre  $D_{y_i} \times I$  produit d'un disque  $D_{y_i}$  de bord  $y_i$  par l'intervalle  $I$  le long d'un voisinage annulaire  $y_i \times I$  de  $y_i$  sur  $\Sigma_g^{(1)}$ . Après ce premier collage des anses de  $H_g^{(2)}$ , il reste à reboucher la 3-variété obtenue qui a pour bord une sphère par la boule  $B^3$ .

Ce procédé définit  $M$  (toujours à homéomorphisme près) sans ambiguïté. Montrons par exemple que le rebouchage par une boule est bien défini. Il suffit de voir que si deux 3-variétés  $M_1$  et  $M_2$  sont homéomorphes en dehors de l'intérieur  $\overset{\circ}{B}^3$  d'une boule  $B^3$ , c'est-à-dire si il existe un homéomorphisme  $\phi$  de  $M_1 \setminus \overset{\circ}{B}_1^3$  dans  $M_2 \setminus \overset{\circ}{B}_2^3$ , alors  $M_1$  est homéomorphe à  $M_2$ . Or,  $\phi$  induit un homéomorphisme  $\psi$  du bord  $S^2$  de la première boule  $B_1^3$  dans le bord  $S^2$  de  $B_2^3$ , qui se prolonge naturellement à l'intérieur des boules par la formule  $\psi(tx) = t\psi(x)$  pour  $t \in [0, 1]$ ,  $x \in S^2$ , ce qui permet de prolonger  $\phi$  en un homéomorphisme de  $M_1$  dans  $M_2$ .

Nous allons maintenant caractériser les systèmes images du système des méridiens  $x_i$  par un homéomorphisme. Il est clair qu'un tel système doit satisfaire les conditions de la définition suivante.

**Definition 2.2** Un  $\Sigma_g$ -système est une famille de  $g$  courbes fermées plongées dans  $\Sigma_g$ , deux à deux disjointes, qui ne sépare pas  $\Sigma_g$ .

La réciproque est aussi vraie (et facile à voir à partir de la classification des surfaces et d'une caractérisation algébrique du genre par exemple à l'aide de la caractéristique d'Euler), pour tout  $\Sigma_g$ -système  $\{y_i\}_{i=1,\dots,g}$ , il existe un homéomorphisme  $h$  de  $\Sigma_g$  tel que  $h(x_i) = y_i$ .

Ainsi, on peut voir toute 3-variété comme un  $\Sigma_g$ -système  $y$  dessiné sur un corps en anses. La figure 4 nous montre quelques scindements de Heegaard de la sphère  $S^3$ . Notons que la sphère  $S^3$  est la seule 3-variété qui admet un scindement de Heegaard de genre 0. Le genre d'un scindement de Heegaard est bien sûr celui de la surface commune aux deux corps en anses.

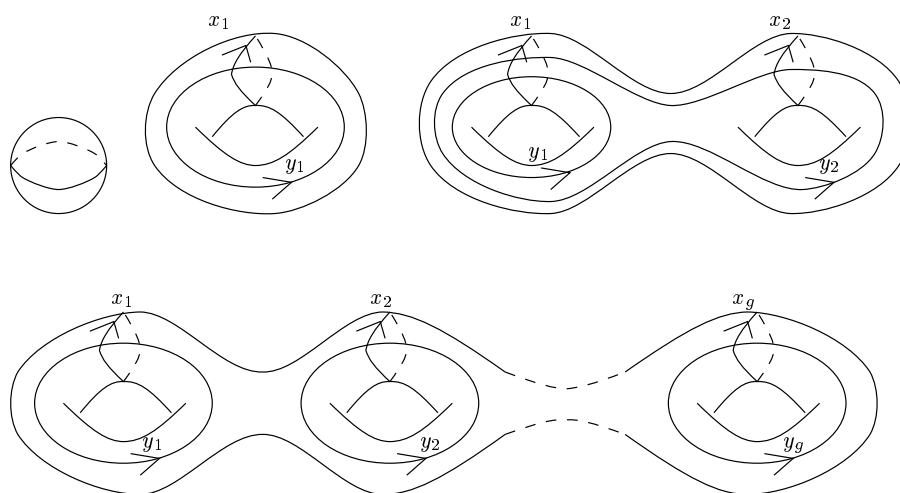


FIG. 4 – Quelques scindements de Heegaard de la sphère  $S^3$

Le  $\Sigma_g$ -système peut aussi se représenter sur un disque. Il suffit pour cela de couper  $\Sigma_g^{(1)}$  le long des courbes  $x_i$ , ce qui transforme  $\Sigma_g$  en un disque à  $(2g-1)$  trous.

La figure 5 montre un scindement de Heegaard de la sphère de Poincaré  $SO(3)/\mathcal{A}_5$  telle qu'elle apparaît (aux notations près) dans [P2, fig. 4] comme un exemple de sphère d'homologie de dimension 3 distincte de  $S^3$ . Une *sphère d'homologie* est une 3-variété qui a la même homologie que  $S^3$ , on peut aussi définir de manière équivalente une sphère d'homologie comme une 3-variété où tout nœud (plongement de  $S^1$ ) borde une surface (à bord!) plongée.

Poincaré avait conjecturé en 1900 [P1] qu'une telle sphère devait nécessairement être homéomorphe à  $S^3$  avant de publier ce contre-exemple sous la forme de la figure 5. Il avait alors transformé sa question en demandant si une sphère

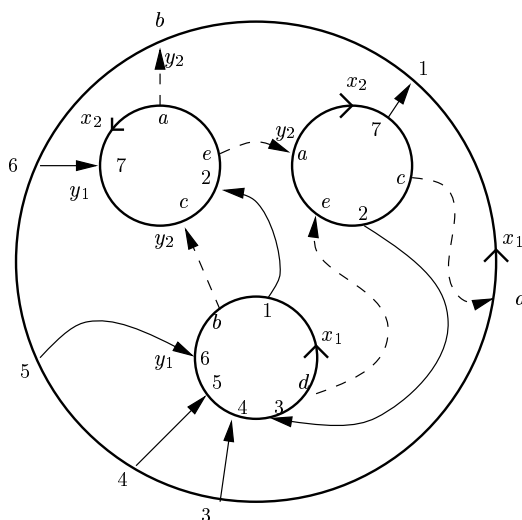


FIG. 5 – La sphère de Poincaré représentée par un scindement de Heegaard de genre 2

d'homotopie devait nécessairement être homéomorphe à  $S^3$  -une 3-variété  $M$  est une *sphère d'homotopie* si et seulement si elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes, tous les groupes d'homotopie de  $M$  sont égaux à ceux de  $S^3$ ,  $\pi_1(M) = 1$ , ou, tout plongement de  $S^1$  dans  $M$  s'étend en une application continue du disque dans  $M$ . Cette question connue sous le nom de *conjecture de Poincaré* est sans doute la question la plus célèbre de la topologie de dimension 3, elle reste ouverte.

Deux scindements de Heegaard d'une 3-variété  $M$  sont dits *isomorphes* si il existe un homéomorphisme de  $M$  qui transforme la surface d'un scindement en la surface de l'autre. La somme connexe de deux 3-variétés  $M_1$  et  $M_2$  est définie comme suit :

$$M_1 \# M_2 \stackrel{\text{déf}}{=} \overline{M_1 \setminus B^3} \cup_{S^2} \overline{M_2 \setminus B^3}$$

La somme connexe de deux scindements de Heegaard est définie de sorte que la boule enlevée à chacune des variétés scindées coupe la surface du scindement selon un disque et que le recollement identifie les bords des deux disques. La somme connexe est ainsi naturellement scindée. Une stabilisation d'un scindement de Heegaard est la somme connexe de ce scindement avec le scindement de genre 1 de  $S^3$ . Graphiquement, on peut voir une stabilisation

comme l'opération qui permet de passer du premier scindement de  $S^2 \times S^1$  au deuxième sur la figure 6.

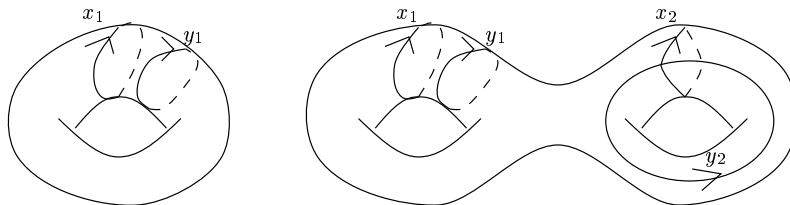


FIG. 6 – Deux scindements de Heegaard de  $S^2 \times S^1$

**Théorème 2.3 (Reidemeister-Singer (1933))** *Deux scindements de Heegaard d'une même variété deviennent isomorphes après un nombre fini de stabilisations élémentaires.*

L'existence des scindements de Heegaard et ce théorème fournissent bien sûr une définition des 3-variétés, mais il est temps de justifier ce qui pour l'instant ressemble trop à des abus de langage par un véritable théorème de structure des 3-variétés.

### 3 Définition des 3-variétés

Ici, une variété *topologique*  $M$  de dimension  $n$  est un espace topologique séparé recouvert par une réunion dénombrable d'ouverts  $U_i$  ( $i \in I$ ), où chaque  $U_i$  est identifié par un homéomorphisme  $\phi_i : U_i \rightarrow V_i$  à un ouvert  $V_i$  de  $\mathbf{R}^n$ . Les variétés sont considérées à homéomorphisme près, c'est-à-dire que deux variétés homéomorphes sont identiques.

Pour  $r = 1, \dots, \infty$ , la variété topologique  $M$  a une structure de *variété différentiable de classe  $C^r$*  ou *variété  $C^r$* , si, pour chaque paire  $\{i, j\} \subset I$ , l'application  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  définie sur  $\phi_i(U_i \cap U_j)$  est un difféomorphisme de classe  $C^r$ . La notion d'application différentiable de classe  $C^s$ ,  $s \leq r$ , entre deux telles variétés se définit naturellement grâce aux identifications locales de ces espaces avec des espaces euclidiens où elle est bien connue, et les variétés  $C^r$  sont considérées à difféomorphisme  $C^r$  près. Si  $\mathbf{R}^n$  est orienté et si les applications  $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$  préservent l'orientation pour  $\{i, j\} \subset I$ , la variété  $M$  est dite *orientée*.

On peut aussi définir les variétés PL ou linéaires par morceaux de dimension 3 comme suit. Un *simplexe* de dimension  $n$  est l'enveloppe convexe de  $(n+1)$  points affinement indépendants dans  $\mathbf{R}^n$ , par exemple, un simplexe de dimension 3 est un tétraèdre. Appelons *triangulation* d'un espace topologique  $X$  un recouvrement dénombrable localement fini de  $X$  par des  $k$ -simplexes  $k \leq n$  tel que (1) toute face d'un de ses simplexes est encore un de ses simplexes et (2) deux quelconques de ses simplexes qui se rencontrent se rencontrent exactement le long d'un de ses simplexes. Une *subdivision*  $T'$  d'une triangulation  $T$  de  $X$  est une triangulation de  $X$  telle que chaque simplexe de  $T'$  est inclus dans un simplexe de  $T$ . Deux triangulations de  $X$  sont *équivalentes* si elles ont des subdivisions isomorphes. Une *variété PL* est une variété topologique munie d'une classe d'équivalence de triangulations. Le théorème suivant assure que pour les 3-variétés, toutes ces notions coïncident.

**Théorème 3.1** *Les catégories des variétés topologiques,  $C^i$  et PL sont identiques en dimension 3.*

Cet énoncé entraîne par exemple que toute variété topologique a une unique structure  $C^\infty$ . Il contient plusieurs théorèmes dus à différents auteurs (voir [Ku]). L'équivalence entre les catégories  $C^i, i = 1, 2, \dots, \infty$  découle du travail [Whi] de Whitney en 1936. En 1934, Cairns [Ca1] a fourni la flèche de la catégorie  $C^1$  vers la catégorie PL, l'existence d'une triangulation sur les variétés  $C^1$ , il a montré [Ca2, Theorem III] qu'elle était surjective en 1940. Moïse [Mo] a montré en 1952 l'équivalence entre la catégorie topologique et la catégorie PL. Le diagramme a été complété indépendamment par Munkres [Mu, Theorem 6.3] et Whitehead [Wh] qui ont prouvé en 1960 l'injectivité de la flèche naturelle de la catégorie  $C^1$  vers la catégorie topologique.

Cet énoncé nous permet de ne décrire que la topologie de nos 3-variétés, de coller sans lisser, et d'utiliser des outils de topologie différentielle comme les voisinages tubulaires ou la théorie de Morse pour les étudier. La théorie de Morse-Smale, par exemple, nous fournit très facilement l'existence des décompositions de Heegaard tandis que l'étude de l'espace des fonctions de Morse de Cerf [Cerf] entraîne directement le théorème de Reidemeister-Singer dont une démonstration au moyen des triangulations a été donnée par Siebenmann [S]. Remarquons qu'une triangulation d'une 3-variété produit aussi un scindement de Heegaard naturel où l'un des deux corps en anses est un voisinage régulier du 1-squelette (graphe formé des arêtes et des sommets) de la triangulation.



Maintenant, en l'absence d'indication contraire, toutes les variétés sont compactes et orientées. Les bords des variétés (à bord!) sont orientés avec la convention de "la normale extérieure en premier". Nous regardons toujours les variétés à homéomorphismes orientés près et les plongements à isotopie ambiante près.

## 4 L'invariant de Casson des sphères d'homologie

Soit  $M$  une sphère d'homologie,  $A$ . Casson a défini  $\lambda(M)$  comme un nombre algébrique de classes de conjugaison de représentations irréductibles de  $\pi_1(M)$  dans  $SU(2)$  comme suit. (Pour les détails, le lecteur est invité à consulter [AM], [M] ou [GM].)

Soit  $M = A \cup_{\Sigma} B$  un scindement de Heegaard de  $M$ .  $\Sigma = \partial A = -\partial B$ . (Le signe  $-$  devant une variété orientée change l'orientation.) Pour  $X = M, \Sigma, A$  ou  $B$ , appelons  $R(X)$  l'espace des classes de conjugaison de représentations irréductibles de  $\pi_1(X)$  dans  $SU(2)$ . Les inclusions de  $\Sigma$  dans  $A$  et  $B$  identifient  $R(A)$  et  $R(B)$  à des sous-espaces de  $R(\Sigma)$ , et le théorème de Van Kampen identifie  $R(M)$  à  $R(A) \cap R(B)$ . De plus, les espaces  $R(A)$ ,  $R(B)$  et  $R(\Sigma)$  ont des structures naturelles de variétés différentiables (non compactes). Pour ces structures,  $R(A)$  et  $R(B)$  sont des sous-variétés de dimensions complémentaires de  $R(\Sigma)$ , leur intersection est compacte et une orientation de  $M$  permet de coorienter  $R(A)$ ,  $R(B)$  et  $R(\Sigma)$ . Ceci permet de définir le nombre d'intersection  $\langle R(A), R(B) \rangle_{R(\Sigma)}$  de  $R(A)$  et  $R(B)$  dans  $R(\Sigma)$ . En effet,  $R(A)$  peut être rendu transverse à  $R(B)$  dans  $R(\Sigma)$  par une isotopie à support compact qui perturbe l'inclusion de  $R(A)$  dans  $R(\Sigma)$ ; après cette isotopie,  $R(A)$  et  $R(B)$  se rencontrent en un nombre fini de points auxquels correspondent des signes (+1) ou (-1).  $\langle R(A), R(B) \rangle_{R(\Sigma)}$  est la somme de ces signes.

L'imprécision sur la coorientation mise à part, Casson a défini son invariant comme :

$$\lambda(M) = \frac{1}{2} \langle R(A), R(B) \rangle_{R(\Sigma)}$$

Casson a démontré l'invariance de  $\lambda$  ainsi défini, en utilisant le théorème de Reidemeister-Singer et en suivant la transformation de la présente définition lors d'une stabilisation.

## 5 Présentations de chirurgie des variétés de dimension 3

Si une 3-variété  $M$ , un nœud  $K$  de  $M$ , et un parallèle  $\mu$  de  $K$  -c'est-à-dire une courbe parallèle à  $K$  sur le bord d'un voisinage tubulaire  $T(K)$  de  $K$ - nous sont donnés, nous pouvons construire la variété  $\chi(M; (K, \mu))$  obtenue à partir de  $M$  par chirurgie sur  $(K, \mu)$  comme suit. Nous enlevons l'intérieur de  $T(K)$  de  $M$  et nous le remplaçons par un tore plein  $D^2 \times S^1$  recollé le long du bord  $\partial T(K)$  de  $T(K)$  par un homéomorphisme de  $\partial T(K)$  dans  $\partial(D^2 \times S^1)$  qui envoie  $\mu$  sur  $\partial D^2 \times \{1\}$ .

$$\chi(M; (K, \mu)) = \overline{M \setminus T(K)} \cup_{\partial T(K) \sim \partial(D^2 \times S^1)} D^2 \times S^1$$

Remarquons que la variété  $\chi(M; (K, \mu))$  est ainsi définie sans ambiguïté. En effet, elle est obtenue en recollant un disque épaissi à  $\overline{M \setminus T(K)}$  le long d'un anneau autour de  $\mu$  dans  $\partial T(K)$ , et, en remplissant la sphère  $S^2$  qui apparaît sur le bord de la variété par une boule standard  $B^3$  de dimension 3.

On appelle  $(K, \mu)$  un nœud pondéré. Une collection de nœuds pondérés disjoints est un entrelacs pondéré. On généralise naturellement la chirurgie sur les nœuds pondérés à la chirurgie sur des entrelacs pondérés en effectuant simultanément la chirurgie sur toutes les composantes de l'entrelacs. Le théorème qui suit, élégamment démontré à partir des scindements de Heegaard dans [Ro], nous motive pour l'étude de cette opération.

**Théorème 5.1 (Lickorish [Li], Wallace [W] 1960)** *Toute 3-variété peut être obtenue à partir de la sphère standard  $S^3$  de dimension 3 par chirurgie sur un entrelacs pondéré.*

Nous allons maintenant introduire les nombres d'enlacement qui nous aideront à paramétrer les chirurgies. Soit  $J$  et  $K$  deux nœuds disjoints dans une sphère d'homologie  $M$ . Il existe une surface  $\Sigma$  bordée par  $K$ . Le nombre d'enlacement de  $J$  et  $K$ ,  $lk(J, K)$ , est alors défini sans ambiguïté comme le nombre d'intersection algébrique de  $J$  et  $\Sigma$ . Il est symétrique.

Lorsque  $M$  est une sphère d'homologie, la classe d'isotopie dans  $\partial T(K)$  de la courbe caractéristique  $\mu$  de la chirurgie est déterminée par le nombre d'enlacement de  $\mu$  et  $K$  dans  $M$  et le nœud pondéré  $(K, \mu)$  est aussi noté  $(K, lk(K, \mu))$ . En particulier, un entrelacs pondéré de  $S^3$  est un entrelacs dont les composantes sont pondérées par des entiers.

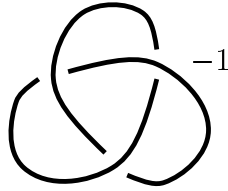


FIG. 7 – Une présentation de chirurgie de la sphère de Poincaré (voir [R])

Le calcul de Kirby qui relie deux présentations de chirurgie d'une même variété renforce notre intérêt pour l'étude des chirurgies. En voici la version de Fenn et Rourke.

**Théorème 5.2 (Fenn-Rourke [FR], Kirby [K] 1978)** *Deux entrelacs pondérés de  $S^3$  qui présentent la même 3-variété s'obtiennent l'un de l'autre par une suite finie de mouvements FR dont la description suit.*

Soit  $\mathbf{L}$  un entrelacs pondéré de  $S^3$  dont une composante  $\mathbf{U}$  est un nœud trivial  $U$  muni d'un parallèle  $\mu_U$  tel que  $lk(U, \mu_U) = \varepsilon = \pm 1$ . Considérons un cylindre  $I \times D^2$  plongé dans  $\overline{S^3 \setminus T(U)}$  de sorte que  $I \times S^1$  soit plongé dans  $\partial T(U)$ . Soit  $\tau$  l'homéomorphisme de  $\overline{S^3 \setminus T(U)}$  qui est l'identité en dehors du cylindre, et qui twist le cylindre autour de son axe en envoyant  $\mu_U$  sur le méridien de  $U$ . Il est clair que  $\tau(\mathbf{L} \setminus \mathbf{U})$  présente la même variété que  $\mathbf{L}$  (où nous pensons aux entrelacs pondérés comme à des entrelacs munis de courbes lorsque nous écrivons  $\tau(\mathbf{L} \setminus \mathbf{U})$ ). Nous définissons un *mouvement FR* comme l'opération décrite ci-dessus qui transforme  $\mathbf{L}$  en  $\tau(\mathbf{L} \setminus \mathbf{U})$  ou son inverse.

D'après les théorèmes ci-dessus, pour définir un invariant des variétés fermées de dimension 3, il suffit de trouver une fonction des entrelacs pondérés invariante par mouvement FR. Faute de bons candidats, ce procédé n'avait pas été utilisé avant 1988. Depuis, avec l'invasion des invariants quantiques, bon nombre d'invariants de variétés de dimension 3 doivent la preuve de leur invariance à ce principe élémentaire ([R-T], [Wa], . . .), mais la plupart d'entre eux souffrent cruellement d'un manque d'interprétation topologique. Ici, nous allons nous appuyer sur ce principe pour donner une deuxième construction (d'une généralisation) de l'invariant de Casson que nous savons déjà interpréter géométriquement.

## 6 Une formule de chirurgie pour l'invariant de Casson.

Afin de présenter une fonction  $\mathbf{F}$  invariante par mouvement FR, nous commençons par introduire quelques notations. Soit  $\mathbf{L} = (\mathbf{K}_i)_{i \in N}$  un entre-lacs pondéré dans une sphère d'homologie  $M$ ,  $\mathbf{K}_i = (K_i, \mu_i) = (K_i, lk(\mu_i, K_i))$ .  $N = \{1, \dots, n\}$  est l'ensemble des indices des composantes de  $\mathbf{L}$ . Pour une partie  $I$  de  $N$ ,  $\mathbf{L}_I = (\mathbf{K}_i)_{i \in I}$ .  $E(\mathbf{L}) = [\ell_{ij} = lk(\mu_i, K_j)]_{i,j=1,\dots,n}$  désigne la matrice d'enlacement symétrique de  $\mathbf{L}$ .  $b^-(\mathbf{L})$  (resp.  $b^+(\mathbf{L})$ ) est le nombre de valeurs propres négatives (resp. positives) de  $E(\mathbf{L})$ . Nous pouvons maintenant poser :

$$\mathbf{F}_M(\mathbf{L}) = (-1)^{b^-(\mathbf{L})} \sum_{I \subset N, I \neq \emptyset} \det(E(\mathbf{L}_{N \setminus I})) \alpha(\mathbf{L}_I) \\ + |\det(E(\mathbf{L}))| \frac{b^+(\mathbf{L}) - b^-(\mathbf{L})}{8}$$

avec

$$\alpha(\mathbf{L}_I) = \left( \tilde{\zeta}(L_I) + \frac{(-1)^{\#I}}{24} L_8(\mathbf{L}_I) \right)$$

où  $L_8(\mathbf{L})$  et  $\tilde{\zeta}(L)$  sont décrits ci-dessous.

$L_8(\mathbf{L})$  est un polynôme homogène en les coefficients de la matrice d'enlacement : soit  $G$  un graphe dont les sommets sont indexés par les éléments de  $N$ ; associons à une arête  $e$  de  $G$  dont les extrémités sont indexées par  $i$  et  $j$  le nombre  $lk(\mathbf{L}; e) = \ell_{ij}$ ; définissons alors  $lk(\mathbf{L}; G)$  comme le produit sur toutes les arêtes  $e$  de  $G$  des  $lk(\mathbf{L}; e)$ . Maintenant,  $L_8(\mathbf{L})$  est la somme des  $lk(\mathbf{L}; G)$  où  $G$  parcourt tous les graphes dont les sommets sont indexés par les éléments de  $N$  et dont l'espace sous-jacent a la forme du chiffre 8 constitué de deux cercles orientés distingués (nord et sud) avec un sommet en commun. (Si  $N = \{1\}$ ,  $L_8(\mathbf{L}) = \ell_{11}^2$ ; si  $N = \{1, 2\}$ ,  $L_8(\mathbf{L}) = 2(\ell_{11} + \ell_{22})\ell_{12}^2 \dots$ )

Le coefficient  $\tilde{\zeta}$  est un sous-produit du polynôme d'Alexander à plusieurs variables  $\Delta$  (défini et normalisé comme dans [Ha] et [BL2]) pour les entrelacs à plusieurs composantes et du polynôme d'Alexander  $\Delta$  classique des nœuds qui est l'ordre du  $H_1$  du revêtement infini cyclique de  $M \setminus K$ , vu comme le  $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ -module naturel qu'il est, normalisé de sorte que  $\Delta(1) > 0$  et  $\Delta(t) = \Delta(t^{-1})$ .

$$\tilde{\zeta}(L) = \begin{cases} (-1)^{n-1} \frac{\partial^n \Delta}{\partial t_1 \dots \partial t_n}(L)(1, \dots, 1) & \text{si } n > 1 \\ \frac{1}{2} \Delta''(K_1)(1) - \frac{1}{12} & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Maintenant nous pouvons énoncer le théorème :

**Théorème 6.1 ([L1], 1992)** *Il existe un invariant topologique rationnel  $\lambda$  des 3-variétés tel que pour tout entrelacs pondéré  $\mathbf{L}$  de  $S^3$ ,*

$$\lambda(\chi(S^3; \mathbf{L})) = \mathbf{F}_{S^3}(\mathbf{L}).$$

L'invariant  $\lambda$  ainsi défini vérifie la formule de chirurgie plus générale :

**Propriété 1** *Pour tout entrelacs pondéré  $\mathbf{H}$  d'une sphère d'homologie  $M$ ,*

$$\lambda(\chi(M; \mathbf{H})) = |\det(E(\mathbf{H}))| \lambda(M) + \mathbf{F}_M(\mathbf{H}).$$

Le principe de la preuve du théorème qui n'aurait probablement pas existé sans les travaux de Walker [Wa] et Boyer-Lines [BL1] est très simple. D'après la version de Fenn et Rourke du théorème de Kirby, il suffit de montrer que les mouvements FR laissent la fonction  $\mathbf{F}$  invariante. Or  $\mathbf{F}$  est une fonction d'invariants homologiques de l'extérieur de l'entrelacs pondéré dont les variations lors d'un homéomorphisme de cet extérieur sont calculables au prix de quelques efforts combinatoires et calculées dans [L1].

La démonstration de la formule de chirurgie générale [L1] repose sur la même remarque.

En 1985, Casson avait résolu des problèmes célèbres de topologie de basse dimension en montrant que son invariant  $\lambda$  possédait, entre autres, les propriétés suivantes:

**Théorème 6.2 (Casson, 1985)** *L'invariant topologique entier  $\lambda$  des sphères d'homologie vérifie :*

1. *Si la représentation triviale est la seule représentation de  $\pi_1(M)$  dans  $SU(2)$ , alors  $\lambda(M) = 0$*
2.  $\lambda(-M) = -\lambda(M)$
3.  $\lambda(M_1 \sharp M_2) = \lambda(M_1) + \lambda(M_2)$
4. *Pour tout nœud  $K$  dans une sphère d'homologie  $M$ , pour tout  $\varepsilon = \pm 1$ ,*

$$\lambda(\chi(M; (K, \varepsilon))) = \lambda(M) + \frac{\varepsilon}{2} \Delta(K)''(1)$$

Remarquons que cette dernière formule est exactement la formule de chirurgie de la propriété 1 lorsque  $\mathbf{H} = (K, \varepsilon = \pm 1)$ .

Ceci, ajouté au fait classique suivant, montre que l'invariant  $\lambda$  du théorème 6.1 est bien une généralisation de l'invariant de Casson.

**Fait 6.3** *Deux sphères d'homologie s'obtiennent l'une à partir de l'autre par une suite de chirurgies sur des nœuds pondérés par  $\pm 1$ .*

Il est clair que si, dans cet énoncé, les polynômes d'Alexander des nœuds de la suite valent un, l'invariant de Casson des deux sphères d'homologie est le même. La réciproque suivante est vraie :

**Propriété 2 ([L2], 1995)** *Deux sphères d'homologie qui ont même invariant de Casson s'obtiennent l'une à partir de l'autre par une suite de chirurgies sur des nœuds de polynôme d'Alexander trivial pondérés par  $\pm 1$ .*

L'invariant  $\lambda$  défini pour toutes les 3-variétés admet des interprétations topologiques dans tous les cas. Ces interprétations et un grand nombre de propriétés récentes de  $\lambda$  sont décrites dans [L3].

## Références

- [AM] S. Akbulut et J. McCarthy, *Casson's invariant for oriented homology 3-spheres, an exposition*. Mathematical Notes **36**, Princeton University Press, Princeton 1990.
- [BL1] S. Boyer et D. Lines, *Surgery formulae for Casson's invariant and extensions to homology lens spaces*, J. Reine Angew. Math. **405**, (1990), 181–220.
- [BL2] S. Boyer et D. Lines, *Conway potential functions for links in  $\mathbf{Q}$ -homology 3-spheres*, Proc. of the Edinburgh Math. Soc. **35**, (1992), 53–69.
- [Ca1] S. S. Cairns, *Triangulation of the manifold of class one*, Bull. AMS, **41**, (1935), 549–552.
- [Ca2] S. S. Cairns, *Homeomorphisms between topological manifolds and analytic manifolds*, Ann. of Math., **41**, (1940), 796–808.

- [Cerf] J. Cerf, *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **39** (1970).
- [FR] R. Fenn et C. Rourke, *On Kirby's calculus of links*, Topology **18**, (1979), 1–15.
- [GM] L. Guillou et A. Marin, *Notes sur l'invariant de Casson des sphères d'homologie de dimension 3*, L'Enseignement Math. **38**, (1992), 233–290.
- [Ha] R. Hartley, *The Conway potential function for links*, Comment. Math. Helvetici **58**, (1983), 365–378.
- [K] R. Kirby, *A calculus for framed links in  $S^3$* . Inventiones Math. **45**, (1978), 35–56.
- [Ku] N. H. Kuiper, *A short history of triangulations and related matters*. Proc. bicenten. Congr. Wiskd. Genoot., Part I, Amsterdam 1978, Math. Cent. Tracts **100**, (1979), 61–79.
- [L1] C. Lescop, *Global surgery formula for the Casson-Walker invariant*, Annals of Mathematics Studies **140**, Princeton University Press, Princeton 1996.
- [L2] C. Lescop, *On the kernel of the Casson invariant*, Prépublication de l'Institut Fourier **349**, (1996) à paraître à Topology.
- [L3] C. Lescop, *On the Casson invariant*, à paraître dans les Proceedings of the second European Congress of Mathematicians, Budapest 1996.
- [Li] W. B. R. Lickorish, *A representation of orientable combinatorial 3-manifolds*, Ann. Math. **76**, (1962), 531–540.
- [M] A. Marin, *Un nouvel invariant pour les sphères d'homologie de dimension 3 (d'après Casson)*, Semin. Bourbaki, 40ème Année, Vol. 1987/88, Exp. No.693, Astérisque **161-162**, (1988), 151–164.
- [Mo] E. E. Moise, *Affine structures in 3-manifolds*, Ann. of Math. **56**, (1952), 96–114.

- [Mu] J. Munkres, *Obstructions to the smoothing of piecewise-differentiable homeomorphisms*, Ann. of Math. **72**, (1960), 521–554.
- [P1] H. Poincaré, *Second complément à l'analysis situs*, Proc. Lond. Math. Soc. **32**, (1900), 277–308.
- [P2] H. Poincaré, *Cinquième complément à l'analysis situs*, Rend. Circ. Mat. Palermo **18**, (1904), 45–110.
- [R-T] N. Reshetikhin and V. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. math. **103**, (1991), 547–597.
- [R] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish, Berkeley 1976.
- [Ro] C. Rourke, *A new proof that  $\Omega_3$  is zero*, Jour. London Math. Soc. **31**, (1985), 373–376.
- [S] L. C. Siebenmann, *Les bisections expliquent le théorème de Reidemeister-Singer. Un retour aux sources*, Prépublication d'Orsay **80 T16**, (1980).
- [T] V. G. Turaev, *Reidemeister torsion in knot theory*, Russian Math. Surveys, 41:1, (1986), 119–182.
- [W] A. W. Wallace, *Modifications and cobounding manifolds. I, II*, Can. J. Math, **12**, (1960), 503–528.
- [Wa] K. Walker, *An Extension of Casson's Invariant*, Annals of Mathematics Studies, **126**, Princeton University Press, Princeton 1992.
- [Wh] J.H.C. Whitehead, *Manifolds with transverse fields in euclidean space*. Ann. of Math. **73**, (1961), 154–212.
- [Whi] H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. **37**, (1936), 645–680.

Christine Lescop (CNRS, UMR 5582)  
 Institut Fourier, B.P.74  
 38402 Saint-Martin-d'Hères cedex  
 FRANCE  
 e-mail: lescop@fourier.ujf-grenoble.fr