Théorème des extréma liés

Leçons : 151, 159, 214, 215, 219

Théorème 1

Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$ et $g_1, \ldots, g_r, f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ tels que $(\mathrm{d}g_1(a), \ldots, \mathrm{d}g_r(a))$ est une famille libre de $(\mathbb{R}^n)^*$.

$\Gamma = \{x \in U : g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}$, $f_{|\Gamma}$ admet un extremum local en $a \in \Gamma$. Alors il existe des uniques réels, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, appelés multiplicateurs de Lagrange, tels que

$$\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathrm{d}g_i(a).$$

Démonstration. Remarquons en premier lieu que le cas $n = r$ est évident donc on suppose $r \leqslant n-1$. Notons $s = n-r$ et procédons à l'identification $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r$ en notant les éléments de $\mathbb{R}^n$ sous la forme (x, y). En particulier, on pose $a = (\alpha, \beta)$. On note $g = (g_1, \ldots, g_r)$

La matrice jacobienne $Jg(a) \in \mathscr{M}_{r,n}$ est de rang r donc elle admet une matrice extraite de rang r et quitte à renuméroter les variables, on peut supposer que $\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r} \end{pmatrix}$ est inversible.

Ainsi, $D_y g(a)$ est inversible donc selon le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage ouvert U de α, V un voisinage ouvert de β et $\varphi : U \to V$ de classe $\mathscr{C}^1$ tels que

$$((x, y) \in U \times V \quad \text{et} \quad g(x, y) = 0) \Longleftrightarrow (x \in U \quad \text{et} \quad y = \varphi(x)).$$

En particulier, $\forall x \in U, (x, \varphi(x)) \in \Gamma$.

Introduisons $h : x \in U \mapsto f(x, \varphi(x))$. Par hypothèse, h est une fonction $\mathscr{C}^1$ admettant un extremum local en α. Donc

$$0 = Jh(\alpha) = Jf(a) \times \begin{pmatrix} I_s \\ J\varphi(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_s} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial y_s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_s \\ J\varphi(\alpha) \end{pmatrix},$$

de sorte que

$$\forall i \in [\![1, r]\!], \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \times \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\alpha) = 0. \tag{1}$$

Or, $\forall k \in [\![1, r]\!]$, $\forall x \in U, g_k(x, \varphi(x)) = 0$ donc on a une relation identique à (1) pour les g_k. Ainsi, si

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_s} & \frac{\partial f}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial y_r} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_s} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial x_s} & \frac{\partial g_r}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial g_r}{\partial y_r} \end{pmatrix},$$

les s premières lignes de M sont combinaisons linéaires des r dernières, donc le rang de M est inférieur à $n - s = r$. Par conséquent, les r premières lignes de M formant une famille libre par hypothèse, la première ligne est combinaison linéaire des r dernières, ce qui est le résultat voulu. □

Remarque.
- Il faut absolument (surtout dans la leçon 214) avoir une idée précise de l'interprétation géométrique du résultat. On remarque que Γ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ de dimension r définie par la submersion g. Si $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \Gamma$ est un chemin dérivable tel que $c(0) = a$, alors $f \circ c$ admet un extremum local en a donc $0 = (f \circ c)'(0) = df(a).c'(0)$ donc $T_a\Gamma \subset \ker df(a)$. Or, $T_a\Gamma = \ker \mathrm{d}g(a) = \bigcap_{i=1}^{r} \ker \mathrm{d}g_i(a)$ donc un raisonnement élémentaire d'algèbre linéaire nous indique que $df(a) \in \mathrm{Vect}(\mathrm{d}g_1(a), \dots, \mathrm{d}g_r(a))$. (compléter $(dg_1(a), \dots, dg_r(a))$ en une base de $(\mathbb{R}^n)^*$ et évaluer l'expression $\mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathrm{d}g_i(a)$ sur la base antéduale).
- Le jury dit qu'il aime moins cette preuve matricielle, mais elle reste acceptable.
- Une application du théorème est donnée par la preuve de l'inégalité d'Hadamard ou l'inégalité arithmético-géométrique (ROUVIÈRE 2003), ou encore le théorème spectral (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005).
  Développons cette dernière. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in \mathscr{L}(E)$ symétrique et $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle u(x), x \rangle \end{array}$, $g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle x, x \rangle - 1 \end{array}$. Alors si S est la sphère unité de E, S est le lieu d'annulation de g. De plus, elle est compacte donc f continue admet un maximum sur S atteint en $e_1 \in S$.
  Selon le théorème des extréma liés, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{d}f(e_1) = \lambda_1 \mathrm{d}g(e_1)$.
  Or, pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}g(x).h = 2\langle x, h \rangle$ et $\mathrm{d}f(x).h = 2\langle u(x), h \rangle$ car u est symétrique.
  Donc pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, $\langle e_1, h \rangle = \lambda_1 \langle u(e_1), h \rangle$ donc $u(e_1) = \lambda_1 e_1$: u admet une valeur propre.

Références :

- Xavier GOURDON (2009). *Les maths en tête : analyse*. 2e éd. Ellipses, p. 317
- François ROUVIÈRE (2003). *Petit guide de calcul différentiel*. 2e éd. Cassini, chapitre 7.