Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein

Leçons : 202, 209, 228, 260, 264

Théorème 1

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ *continue et* $B_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *le* n*-ième polynôme de Bernstein associé à* f*.*

Soit $\omega : h \mapsto \sup\{|f(u)-f(v)|, |u-v| \leqslant h\}$ *le module d'uniforme continuité de* f*. Alors*

$$\|f - B_n\|_\infty \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

donc $(B_n)_n$ *converge uniformément vers* f *sur* $[0,1]$*.*

L'inégalité est optimale dans le sens où il existe $f \in \mathscr{C}([0,1]$ *et* $\delta > 0$ *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f - B_n\|_\infty \geqslant \delta\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Remarquons d'abord que ω est bien définie puisque, selon le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[0,1]$, ce qui assure de plus que $\omega(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

Lemme 2

La fonction ω *est croissante, sous-additive et pour tout* $h \in [0,1]$*, pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *tel que* $\lambda h \in [0,1]$*, on a* $\omega(\lambda h) \leqslant (\lambda+1)\omega(h)$*.*

Démonstration. La croissance de ω est évidente.

Soient $h_1, h_2 \in [0,1]$ tels que $h_1 + h_2 \in [0,1]$. Soient $v > u$ tels que $v - u \leqslant h_1 + h_2$. S'il existe i tel que $v - u \leqslant h_i$, alors $|f(v) - f(u)| \leqslant \omega(h_i)$.

Sinon, on peut écrire

$$v - u = v - (u + h_1) + u + h_1 - u \quad \text{et} \quad 0 \leqslant v - (u + h_1) \leqslant h_1 + h_2 - h_1 \leqslant h_2$$

donc $|f(v) - f(u)| \leqslant \omega(h_2) + \omega(h_2)$.

On en déduit que $\omega(h_1 + h_2) \leqslant \omega(h_1) + \omega(h_2)$: ω est sous-additive.

Par une récurrence immédiate, on a pour tous $h \in [0,1]$ et $r \in \mathbb{N}$ tels que $rh \in [0,1]$, on a $\omega(rh) \leqslant r\omega(h)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda h \in [0,1]$. Alors par croissance de ω, on a

$$\omega(\lambda h) \leqslant \omega((E(\lambda)+1)h) \leqslant (E(\lambda)+1)\omega(h) \leqslant (\lambda+1)\omega(h).$$

□

Démonstration (du théorème)**.** Soit $x \in [0,1]$ et $(X_i)_i$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathscr{B}(x)$. Alors si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, on sait que S_n suit la loi binômiale $\mathscr{B}(x,n)$ et par théorème de transfert, $\mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right] = B_n(x)$. Ainsi,

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \mathbb{E}\left[\left|f(x) - f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right|\right] \leqslant \mathbb{E}\left[\omega\left(\left|x - \frac{S_n}{n}\right|\right)\right].$$

Or, selon le lemme,

$$\omega\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)=\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\times\left(\sqrt{n}\left|x-\frac{S_n}{n}\right|\right)\leqslant\left(\left|x-\frac{S_n}{n}\right|+1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Donc

$$|f(x)-B_n(x)|\leqslant\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_1+1\right)\leqslant\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(\sqrt{n}\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2+1\right).$$

Or, puisque $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{n}\right]=x$, on a, par indépendance des X_i,

$$\left\|x-\frac{S_n}{n}\right\|_2^2=\mathrm{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}x(1-x)=\frac{x(1-x)}{n}.$$

Donc finalement,

$$|f(x)-B_n(x)|\leqslant\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)(\sqrt{x(1-x)}+1)\leqslant\frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

car si $x\in[0,1]$, $x\leqslant\frac{1}{2}$ ou $1-x\leqslant\frac{1}{2}$.

Prouvons maintenant l'optimalité de cette majoration. Soit $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$. Par inégalité triangulaire renversée, on a $\omega(h)\leqslant h$ pour tout h.

Soient $X_1,\dots,X_n$ une suite de variables de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ indépendantes, $\varepsilon_j=2X_j-1$ pour tout $j\in\mathbb{N}^*$ et $T_n=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j=2S_n-n$. Les ε_j constituent une suite de variables de Rademacher indépendantes. De plus,

$$\|f-B_n\|_\infty\geqslant\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\left|B_n\left(\frac{1}{2}\right)\right|=\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n}\mathbb{E}[|T_n|].$$

Soit $Y=\prod_{j=1}^{n}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right)$. En utilisant l'inégalité $e^x\geqslant 1+x$, on obtient

$$|Y|=\prod_{j=1}^{n}\sqrt{1+\frac{\varepsilon_j^2}{n}}\leqslant\prod_{j=1}^{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\leqslant\prod_{j=1}^{n}\sqrt{e^{1/n}}=\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\right)=\sqrt{e}.$$

Donc $|\mathbb{E}[T_nY]|\leqslant\sqrt{e}\mathbb{E}[|T_n|]$

Mais par ailleurs, les ε_j étant indépendantes et centrées,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_nY]&=\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\varepsilon_j\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_j\right)\prod_{k\neq j}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\varepsilon_k\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\mathbb{E}[\varepsilon_j]\prod_{k\neq j}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[\varepsilon_k]\right)+\frac{i}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[\varepsilon_j^2]\prod_{k\neq j}\left(1+\frac{i}{\sqrt{n}}\mathbb{E}[\varepsilon_k]\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}\frac{i}{\sqrt{n}}=i\sqrt{n}\end{aligned}$$

Donc $\sqrt{n}\leqslant\sqrt{e}\mathbb{E}[|T_n|]$ de sorte que $\|f-B_n\|_\infty\geqslant\sqrt{\frac{n}{e}}\times\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{e}}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

□

Remarque. On se ramène au théorème de Weierstrass sur un intervalle quelconque $[a,b]$ en posant pour $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue, $\tilde{f} : x \mapsto f(a+(b-a)x)$.

Référence : Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY (2013). *Analyse pour l'agrégation*. 4e éd. Dunod, p. 518