Théorème de Grothendieck

Leçons : 201, 208, *213*, 234

Théorème 1

Soit (X,μ) un espace de probabilités, et S un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(\mu)$ tel que $S \subset L^\infty(\mu)$. Alors S est de dimension finie.

Démonstration. Étape 1 : il existe $K > 0$ tel que $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_p$.

Soit i l'injection canonique de $(S, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(S, \|\cdot\|_p)$. C'est une application linéaire bijective, qui est continue car $\|\cdot\|_p \leqslant \|\cdot\|_\infty$ puisque $\mu(X) = 1$. De plus ses espaces de départ et d'arrivée sont des Banach :

- D'une part car S est fermé dans $L^p(\mu)$ qui est complet selon le théorème de Riesz-Fischer ;
- D'autre part, si $(f_n)_n \in S^{\mathbb{N}}$ tend vers f dans $L^\infty(\mu)$, alors $(i(f_n))_n$ tend vers $i(f)$ dans $L^p(\mu)$ donc comme S est fermé dans L^p, $i(f) = f \in S$, de sorte que S est aussi un sous-espace fermé de $L^\infty(\mu)$, donc est complet.

Par conséquent, selon le théorème d'isomorphisme de Banach, i est un isomorphisme bicontinu ; en particulier, il existe $K > 0$ tel que $\forall f \in S, \|f\|_\infty \leqslant K\|f\|_p$.

Étape 2 : il existe $M > 0$ tel que $\forall f \in S, \|f\|_p \leqslant K\|f\|_\infty$.

Soit $f \in S$, on distingue deux cas :

- *Premier cas* : $p < 2$. Selon l'inégalité de Hölder,

$$\|f\|_p^p \leqslant \mu(X)^{1-\frac{p}{2}} \left(\int_X (|f(x)|^p \mathrm{d}\mu(x))^{\frac{2}{p}} \right)^{\frac{p}{2}} \leqslant \|f\|_2^p$$

  si bien que $\|f\|_p \leqslant \|f\|_2$.
- *Deuxième cas* : $p \geqslant 2$.

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^{p-2}|f(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x) \leqslant \|f\|_\infty^{p-2}\|f\|_2^2 \overset{\text{etape 1}}{=} K^{p-2}\|f\|_p^{p-2}\|f\|_2^2$$

  donc en simplifiant de part et d'autre de l'inégalité, $\|f\|_p^2 \leqslant K^{p-2}\|f\|_2^2$ et le résultat s'ensuit.

Étape 3 : utilisation de ces relations de domination.

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille orthonormée de S. Si $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Q}^n$, il existe $X_c \subset X$ de mesure pleine tel que

$$\forall x \in X_c, \left| \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|_\infty \leqslant M_1 \left\| \sum_{i=1}^n c_i f_i \right\|_2 = M_1 \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}$$

avec $M_1 > 0$ une constante (cf étapes 1 et 2).

Donc si $X' = \bigcup_{c \in \mathbb{Q}^n} X_c$, X' est de mesure pleine et on a

$$\forall c \in \mathbb{Q}^n, \forall x \in X', \left| \sum_{i=1}^n c_i f_i(x) \right| \leqslant M_1 \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2}.$$

Comme $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, le résultat vaut également pour $c \in \mathbb{R}^n$.

En particulier, si $x \in X'$, $c_i = f_i(x)$, on obtient $\left|\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2\right| \leqslant M_1 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2}$ soit

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2\right) \leqslant M_1^2.$$

Donc en intégrant, $\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_2^2 \leqslant M_1^2$ soit, comme $(f_1, \ldots, f_n)$ est orthonormée, $n \leqslant M_1^2$.

Supposons que S soit de dimension infinie. On pourrait alors trouver une famille libre de taille $E(M_1^2)+1$, ce qui fournirait par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, une famille orthonormée de S de cette taille : cela contredit le résultat ci-dessus. Donc S est de dimension finie.

$\square$

Remarque. Le théorème de l'isomorphisme de Banach est une conséquence du théorème de Baire, qu'il faut donc connaître.

Références : Maxime ZAVIDOVIQUE (2013). *Un max de maths*. Calvage et Mounet (attention il y a une erreur).