Théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible

Leçons : 207, 223, 230, 235, 243

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 dont la somme sur le disque unité est notée f.

Théorème 1

On suppose que $\sum_n a_n$ *converge et a pour somme* S*. Alors si* $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$ *et* $\Delta_{\theta_0} = \left\{z \in D(0,1) : \exists (\rho, \theta) \in [0,1[\times [-\theta_0, \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\right\}$*, on a* $f(z) \xrightarrow[\substack{z \in \Delta_{\theta_0} \\ z \to 1}]{} S$*.*

Démonstration. L'idée clef de la preuve est de procéder à une transformation d'Abel sur les sommes partielles $\sum a_n z^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = R_{n-1} - R_n$ où $R_{-1} = 0$ et $R_p = \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} a_k$ pour $p \geqslant 0$. Donc si $N \in \mathbb{N}$ et $z \in D(0,1)$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{N} = \sum_{n=0}^{N} (R_{n-1} - R_n)(z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=0}^{N} R_n (z^n - 1) = \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n (z-1).$$

D'où, en faisant tendre N vers $+\infty$, $f(z) - S = (z-1) \sum\limits_{n=0}^{+\infty} R_n z^n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite des restes tend vers 0 par convergence de $\sum_n a_n$, on peut fixer $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N, |R_n| \leqslant \varepsilon$. Ainsi,

$$|f(z) - S| \leqslant \left| \sum_{n=0}^{N} R_n z^n \right| |z-1| + \varepsilon \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n \right) |z-1| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) |z-1| + \varepsilon \frac{1}{1-|z|} |z-1|. \quad (1)$$

Étudions le second terme : si $z = 1 - \rho e^{i\theta} \in \Delta_{\theta_0}$, alors

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{\rho(1+|z|)}{1-|z|^2} \leqslant \frac{2\rho}{1-|z|^2}$$

et

$$1 - |z|^2 = 1 - (1 - \rho\cos\theta)^2 - \rho^2 \sin^2\theta = 2\rho\cos\theta - \rho^2 \geqslant 2\rho\cos\theta_0 - \rho^2$$

car $|\theta| \leqslant \theta_0$. Donc si $\rho \leqslant \cos\theta_0$, on a

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leqslant \frac{2}{2\cos\theta_0 - \cos\theta_0} \leqslant \frac{2}{\cos\theta_0}.$$

Si de plus, on suppose que $\rho \left(\sum_{n=0}^{N} |R_n| \right) \leqslant \varepsilon$ et $\rho \leqslant \varepsilon$, selon (1), $|f(z) - S| \leqslant \varepsilon + \dfrac{2}{\cos\theta_0}\varepsilon$. En d'autres termes, $f(z) \xrightarrow[\substack{z \in \Delta_{\theta_0} \\ z \to 1}]{} S$.

□

Une réciproque (partielle) de ce théorème est donnée par le théorème « taubérien faible » :

Proposition 2

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} S$, alors $\sum_n a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Démonstration. Soit $0 < x < 1$. Si $n \in \mathbb{N}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, alors

$$S_n - S = (S_n - f(x)) + (f(x) - S).$$

C'est le premier terme de la somme qu'il est intéressant d'étudier pour obtenir la convergence voulue. On a

$$|S_n - f(x)| \leqslant \left| \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} k|a_k|(1-x) + \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k a_k}{n} x^k \right|$$

puisque d'une part, $0 \leqslant 1 - x^k = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leqslant k(1-x)$ et d'autre part $\frac{k}{n} \geqslant 1$ si $k \geqslant n+1$. Ainsi, si $M = \sup_{k\in\mathbb{N}} k|a_k|$ et $L_n = \sup_{k\geqslant n} k|a_k|$, on a

$$|S_n - f(x)| \leqslant Mn(1-x) + \frac{L_n}{n}\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \leqslant\leqslant Mn(1-x) + \frac{L_n}{n}\frac{1}{1-x}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leqslant M\varepsilon + \frac{L_n}{n} \times \frac{n}{\varepsilon} \leqslant M\varepsilon + \frac{L_n}{\varepsilon}$. Par hypothèse, $L_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant N$, $L_n \leqslant \varepsilon^2$, d'où

$$\left| S_n - f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \right| \leqslant (M+1)\varepsilon.$$

Or, $f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} S$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\left| f\left(1 - \frac{\varepsilon}{n}\right) - S \right| \leqslant \varepsilon$. Par suite, $\forall n \geqslant \max(n_0, N), |S_n - S| \leqslant (M+2)\varepsilon$. Donc $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$. □

Remarque.
- La réciproque du théorème d'Abel angulaire est fausse en général, car $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z} \xrightarrow{z\to 1} \frac{1}{2}$ tandis que $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ diverge.
- Un exemple d'application du théorème : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \lim_{x\to 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.
- Le théorème taubérien faible est encore vrai si $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, c'est le théorème taubérien de Hardy-Littlewood.

Référence : Xavier GOURDON (2009). *Les maths en tête : analyse*. 2e éd. Ellipses, pp. 253-254