Quelques ordres moyens

Leçons : *223*, 224, 230

Définition 1

Un ordre moyen de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *est une fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} f(n) \sim_{x \to +\infty} \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} g(n).$$

Proposition 2

Un ordre moyen de $\sigma : n \mapsto \sum_{d|n} d$ *est* $x \mapsto \frac{\pi^2}{12} x$ *et* $\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \ln x)$.

Démonstration. Si $x \geqslant 1$, on a

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \sum_{n=1}^{E(x)} \sum_{d|n} d = \sum_{\substack{(d,m) \in [\![1, E(x)]\!] \\ dm \leqslant x}} d = \sum_{m=1}^{E(x)} \sum_{d=1}^{E\left(\frac{x}{m}\right)} d = \sum_{m=1}^{E(x)} \frac{1}{2} E\left(\frac{x}{m}\right)\left(E\left(\frac{x}{m}\right) + 1\right).$$

Or, $E\left(\frac{x}{m}\right)\left(E\left(\frac{x}{m}\right)+1\right) = \left(\frac{x}{m} - \left\{\frac{x}{m}\right\}\right)\left(\frac{x}{m} - \left\{\frac{x}{m}\right\} + 1\right) = \left(\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{x}{m} O_u(1) + O_u(1)$. [1] Donc en sommant, on a

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \sum_{m=1}^{E(x)} \left(\frac{x}{m}\right)^2 + O(1) \sum_{m=1}^{E(x)} \frac{x}{m} + O(x).$$

Or, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et si $m \geqslant 2$, par comparaison série-intégrale,

$$\int_m^{m+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{m^2} \leqslant \int_{m-1}^{m} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

soit, en sommant pour $m \in [\![E(x)+1, +\infty[\![$,

$$\frac{1}{E(x)+1} = \int_{E(x)+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{m^2} \leqslant \int_{E(x)}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{1}{E(x)}.$$

Donc $\sum_{m > x} \frac{1}{m^2} \sim_{m \to +\infty} \frac{1}{x}$, en particulier, $\sum_{m \leqslant x} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{1}{x}\right)$.

Par ailleurs, le même procédé de comparaison série-intégrale donne $\sum_{m \leqslant x} \frac{1}{m} = \ln(x) + O(1)$ de sorte que

$$\sum_{n \leqslant x} \sigma(n) = \frac{\pi^2}{6} x^2 + O(x) + O(x \ln(x)) = \frac{\pi^2}{6} x^2 + O(x \ln(x)),$$

ce qui est le résultat voulu. □

1. O_u désignant une notation O uniforme par rapport à x

Proposition 3

Un ordre moyen de l'indicatrice d'Euler φ est $x \mapsto \frac{3}{\pi^2}x$ et $\sum\limits_{1\leqslant n\leqslant} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\ln x)$.

Démonstration. Selon la formule d'inversion de Möbius, $\varphi(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = \sum\limits_{md=n} \mu(d)m$. Donc

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n) = \sum_{n\leqslant x}\sum_{md=n}\mu(d)m = \sum_{d\leqslant x}\mu(d)\sum_{m=1}^{E\left(\frac{x}{d}\right)} m$$
$$= \sum_{d\leqslant x}\mu(d)\frac{1}{2}E\left(\frac{x}{d}\right)\left(E\left(\frac{x}{d}\right)+1\right) = \frac{x^2}{2}\sum_{d\leqslant x}\frac{\mu(d)}{d^2} + O(x\ln x),$$

la dernière égalité découlant de la démonstration précédente et du fait que $\mu(d) = O_u(1)$.

Or, si $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{d=1}^{N}\frac{\mu(d)}{d^2}\right)\left(\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{d=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu(d)}{(dk)^2} \overset{m=dk}{=} \sum_{m=1}^{N^2}\frac{1}{m^2}\sum_{d|m}\mu(d) = 1$$

puisque $\sum\limits_{d|m}\mu(d) = 1$ sauf si $m = 1$.

Donc en faisant tendre N vers $+\infty$, on a $\sum\limits_{d=1}^{+\infty}\frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$. Ainsi,

$$\sum_{n\leqslant x}\varphi(n) = \frac{3x^2}{\pi^2} + O(x\ln x).$$

□

Référence : Gerald TENENBAUM (2015). *Introduction à la théorie probabiliste et analytique des nombres*. 4[e] éd. Belin, pp. 46-47, largement complété par Adrien Laurent.