Processus de Poisson

Leçons : 263, 264

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

Définition 1

Un processus de comptage est une suite de variables aléatoires réelles $(N(t))_{t \geqslant 0}$ telles que

1. $N(0) = 0$.
2. $\forall t \geqslant 0, N(t) \in \mathbb{N}^*$.
3. $t \mapsto N(t)$ *est croissante.*

Du point de vue de la modélisation, $\forall 0 \leqslant a \leqslant b$, $N(b) - N(a)$ représente le nombre de « tops » se produisant dans l'intervalle de temps $[a, b[$.

Définition 2

Un processus de Poisson de densité $\lambda > 0$ est un processus de comptage $(N(t))_{t \geqslant 0}$ tel que :

1. *Le processus est à accroissement indépendants : $\forall t_0 \leqslant t_1 < \cdots < t_k$, les variables aléatoires $N_{t_k} - N_{t_{k-1}}, \ldots, N_{t_1} - N_{t_0}$ sont indépendantes.*
2. *Pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}_+^2$, $N(s+t) - N(s)$ suit la loi de Poisson de paramètre λt.*

Les processus de Poisson sont souvent utilisés pour modéliser des files d'attente, chaque top représentant l'appel d'un client au guichet.

Proposition 3

Un processus de Poisson est à accroissements stationnaires : soit $N_1, \ldots, N_k$ le nombre de tops se produisant dans les intervalles $I_1, \ldots, I_k$; alors si $\tau \geqslant 0$, et $N_1', \ldots, N_k'$ est le nombre de tops se produisant dans les intervalles translatés de τ $I_1' + \tau, \ldots, I_k'$, $(N_1', \ldots, N_k')$ et $(N_1, \ldots, N_k)$ ont la même loi.

Proposition 4

Un processus de Poisson est localement continu : $\lim\limits_{h \to 0^+} \mathbb{P}(N(t+h) - N(t) \geqslant 1) = 0$.

Le but du développement est d'étudier le temps d'attente entre deux tops :

Théorème 5

Soit $S_n = \inf\{t \geqslant 0, N(t) \geqslant n\}$ et $T_k = S_k - S_{k-1}$ pour $k \geqslant 1$. Alors

1. $(T_n)_n$ *est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathscr{E}(\lambda)$.*
2. $S_n = T_1 + \cdots + T_n$ *suit la loi $\Gamma(n, \lambda)$ de densité*

$$f_{S_n}(s) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\lambda s} (\lambda s)^{n-1} & \text{si} \quad s \geqslant 0 \\ 0 \quad \text{sinon} & \end{cases} .$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Étape 1 : Changement de variable : supposons que le vecteur aléatoire $(S_1,\dots,S_n)$ soit à densité, de densité φ. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continue bornée. Alors comme $S_n \geqslant \dots, \geqslant S_1$, par un changement de variable $s_k = t_1+\dots+t_k$ de jacobien 1 (la matrice jacobienne est triangulaire), on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(T_1,\dots,T_n)] &= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_n\geqslant\dots\geqslant S_1} f(S_1,\dots,S_n-S_{n-1})]\\ &= \int_{0\leqslant s_1\leqslant\dots\leqslant s_n} f(s_1,\dots,s_n-s_{n-1})\varphi(s_1,\dots,s_n)\mathrm{d}s_1\dots\mathrm{d}s_n\\ &= \int_{t_1,\dots,t_n\geqslant 0} f(t_1,\dots,t_n)\varphi(t_1,\dots,t_1+\dots+t_n)\mathrm{d}t_1\dots\mathrm{d}t_n.\end{aligned}$$

Donc $\psi : (t_1,\dots,t_n)\mapsto \varphi(t_1,t_1+t_2,\dots,t_1+\dots+t_n)$ est la densité de $(T_1,\dots,T_n)$.

Étape 2 : Calcul de la densité de $(S_1,\dots,S_n)$:

Soit A_n l'évènement : $S_1\in[s_1,s_1+h_1[,\dots,S_n\in[s_n,s_n+h_n[$ où $0<s_1<s_1+h_1<s_2<\dots<s_n+h_n$. Alors A_n est la réunion des évènements :

- zéro top dans $[0,s_1[$ et *exactement* un top dans $[s_1,s_1+h_1[$
- zéro top dans $[s_1+h_1,s_2[$ et exactement un top dans $[s_2,s_2+h_2[$
- $\vdots$
- zéro top dans $[s_{n-1}+h_{n-1},s_n[$ et *au moins* un top dans $[s_n,s_n+h_n[$.

Or, le processus étant à accroissements indépendants, les variables aléatoires « nombre de tops » dans des intervalles disjoints sont indépendantes de sorte que

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(N(s_1)=0)\times\mathbb{P}(N(s_1+h_1)-N(s_1)=1)\times\mathbb{P}(N(s_2)-N(s_1+h_1)=0)\times \mathbb{P}(N(s_2+h_2)-N(s_2)=1)\times\dots\times\mathbb{P}(N(s_n)-N(s_{n-1}+h_{n-1})=0)\times\mathbb{P}(N(s_n+h_n)-N(s_n)\geqslant 1)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_n) &= e^{-\lambda s_1}e^{-\lambda h_1}(\lambda h_1)e^{-\lambda(s_2-s_1-h_1)}e^{-\lambda h_2}(\lambda h_2)\dots e^{-\lambda(s_n-s_{n-1}-h_{n-1})}(1-e^{-\lambda h_n})\\ &= e^{-\lambda s_n}\lambda^{n-1}h_1\dots h_{n-1}(1-e^{-\lambda h_n}).\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\mathbb{P}(A_n) = \int_{\xi_1=s_1}^{s_1+h_1}\dots\int_{\xi_n=s_n}^{s_n+h_n}\mathbb{1}_{0\leqslant\xi_1\leqslant\dots\leqslant\xi_n}\lambda^n e^{-\lambda\xi_n}\mathrm{d}\xi_1\dots\mathrm{d}\xi_n,$$

ceci valant pour tous les pavés $[s_1,s_1+h_1[\times\dots\times[s_n+h_n[$, qui constituent une classe stable par intersection engendrant $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ donc $(S_1,\dots,S_n)$ a pour densité $\mathbb{1}_{\xi_1\leqslant\dots\leqslant x_n}\lambda^n e^{-\lambda\xi_n}$.

Conclusion : selon la première étape, la densité de $(T_1,\dots,T_n)$ est

$$(t_1,\dots,t_n)\mapsto\lambda^n e^{-\lambda t_1}\dots e^{-\lambda t_n}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^n}(t_1,\dots,t_n).$$

En calculant les densités marginales, on constate immédiatement que $f_{(T_1,\dots,T_n)}(t_1,\dots,t_n) = f_{T_1}(t_1)\dots f_{T_n}(t_n)$; en d'autres termes, $T_1,\dots,T_n$ sont indépendantes. La loi de S_n est donc $\Gamma(n,\lambda)$ en vertu du lemme ci-dessous. □

Lemme 6

> *Si $T_1,\dots,T_n$ sont n variables aléatoires i.i.d de loi $\mathscr{E}(\lambda)$, alors $S=T_1+\dots+T_n$ suit la loi* $\Gamma(n,\lambda)$

Démonstration. Calculons la transformée de Laplace d'une variable aléatoire V suivant la loi $\Gamma(n,\lambda)$, en rappelant que la transformée de Laplace caractérise la loi :

$$L_V(u)=\mathbb{E}[e^{uS}]=\frac{\lambda}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}e^{ux}e^{-\lambda x}(\lambda x)^{n-1}\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}e^{-x(\lambda-u)}(\lambda x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

bien définie pour $\lambda-u>0$ donc en posant $y=x(\lambda-u)$, on a

$$L_V(u)=\frac{\lambda}{\Gamma(n)}\int_0^{\infty}e^{-y}\left(\frac{\lambda y}{\lambda-u}\right)^{n-1}\frac{\mathrm{d}y}{\lambda-u}=\frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^{n}\int_0^{\infty}e^{-y}y^{n-1}\mathrm{d}y=\left(\frac{\lambda}{\lambda-u}\right)^{n}.$$

Or, par le même changement de variable, si $T\sim\mathscr{E}(\lambda)$,

$$L_T(u)=\int_0^{+\infty}e^{ux}\lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{\lambda}{\lambda-u}\int_0^{\infty}e^{-y}\mathrm{d}y=\frac{\lambda}{\lambda-u}$$

donc comme la transformée de Laplace d'une somme de variable aléatoires indépendantes est le produit de leurs transformées de Laplace, on a le résultat. □

Remarque.
- On peut aussi parler du paradoxe de l'inspection, ou paradoxe de l'autobus, c'est dans le Foata–Fuchs juste après.
- Les deux premières propositions sont indépendantes du développement proprement dit.

Références :

- Dominique FOATA et Aimé FUCHS (2004). *Processus stochastiques : processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales*. Dunod, pp. 28-31
- Dominique FOATA et Aimé FUCHS (2003). *Calcul des probabilités*. Dunod, p. 148 (pour le lemme)