Points extrémaux de la boule unité de $\mathscr{L}(E)$

Leçons : 160, 161, 181

Définition 1

Un point extrémal de X est un point qui n'appartient à aucun segment $[AB]$, où A et B sont des points de X.

Théorème 2

Soit E espace euclidien. Les points extrémaux de la boule unité de $\mathscr{L}(E)$ sont les éléments de $O(E)$

Lemme 3

Si X est convexe, un point extrémal de X est un point qui ne peut s'écrire comme milieu de deux points distincts de X.

Démonstration. Supposons que z vérifie une telle propriété et que $tx_1 + (1-t)x_2 = z$ où $x_i \in X \setminus \{z\}$. Quitte à échanger x_1 et x_2, on peut supposer $t \leqslant \frac{1}{2}$ et alors $z = \frac{x_2}{2} + \frac{2tx_1 + (1-2t)x_2}{2}$ ce qui est absurde. □

Démonstration (du théorème)**. Étape 1 : tout $u \in O(E)$ est extrémal** : Comme u est une isométrie, $\|u\| = 1$. Supposons que $u = \frac{v+w}{2}$ où $v, w \in B$. Soit $x \in E$ de norme 1. Alors

$$1 = \|u(x)\| = \|x\| \leqslant \frac{1}{2}(\|v(x)\| + \|w(x)\|) \leqslant \frac{1}{2}(\|v\| + \|w\|) \leqslant 1,$$

donc toutes les inégalités sont des égalités. En particulier, on a un cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire pour une norme euclidienne donc il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $v(x) = \lambda w(x)$. Or, comme $v, w \in B$, on a $\|v(x)\| \leqslant \|x\| = 1$ et $\|w(x)\| \leqslant 1$. De plus, $\frac{1}{2}(\|v(x)\| + \|w(x)\|) = 1$ donc $\|v(x)\| = \|w(x)\| = 1$. Ainsi, $\lambda = 1$ et $v(x) = w(x)$.

Étape 2 : les éléments de $B \setminus O(E)$ ne sont pas extrémaux : soit u un tel élément, soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de u dans cette base. Par décomposition polaire, on peut trouver $O \in O_n(\mathbb{R})$, $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tels que $A = OS$.

En outre, par le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tPDP$ où $D = \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_n)$ avec $0 < d_1 \leqslant \cdots \leqslant d_n$. Comme A et O^{-1} sont éléments de B, S l'est aussi, donc $\forall k \in [\![1, n]\!], d_k \leqslant 1$. En effet, si $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est une base de diagonalisation de de S et $x = \sum a_i e'_i$, alors

$$\|S(x)\|^2 = \sum d_i^2 |a_i|^2 \leqslant (\max_i(d_i))^2 \|x\|.$$

A n'est pas orthogonale donc il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $d_k < 1$. Pour simplifier, on prend $k = 1$. Il existe alors $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ tels que $d_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Introduisons $D' = \mathrm{Diag}(\alpha, d_2, \dots, d_n)$ et $D'' = \mathrm{Diag}(\beta, d_2, \dots, d_n)$. On a alors $A = \frac{O^tPD'P + O^tPD''P}{2}$.

Enfin, si $\|X\| = 1$,

$$\|O^tPD'PX\|^2 \overset{P,O \in O_n}{=} {}^tX^tPD'P^tOO^tPD'PX = {}^tX^tP(D')^2PX = {}^t(PX)(D')^2PX \leqslant 1$$

car $\|PX\| = \|X\| = 1$ et $(D')^2$ a des coefficients diagonaux entre 0 et 1. Donc $O^t PD'P$ et $O^t PD''P$ sont deux éléments distincts de B, de sorte que u n'est pas extrémal.

$\square$

Remarque. Selon le théorème de Krein-Milman (ou Minkowski), la boule unité de $\mathscr{L}(E)$ est donc l'enveloppe convexe de $O(E)$.

Référence : Serge FRANCINOU, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS (2008). *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS : Algèbre 3*. Cassini, p. 130.