Université Rennes 1
École Normale Supérieure de Rennes

# Résumés de plans de leçons

Gabriel Lepetit

2016 – 2017

# Table des matières

## Introduction

Voici le fichier regroupant les résumés des plans des leçons que j'ai préparées. Il est très largement inspiré, voire honteusement recopié sur les plans d'Adrien Laurent, Florian Lemmonier ainsi que dans une moindre mesure Hélène Hivert. Je m'excuse par avance pour les (nombreuses) coquilles.

J'ai fait cinq impasses :

**181** Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.
**182** Applications des nombres complexes à la géométrie
**183** Utilisation des groupes en géométrie
**222** Exemples d'équations aux dérivées partielles linéaires
**233** Méthodes itératives en analyse numérique matricielle

La leçon 222 est intéressante pour ceux qui ont déjà une certaine maîtrise des EDP et ont envie de faire des développements à ce sujet qui vont alors plutôt bien se recaser (équation de la chaleur avec Fourier, équation de Schrödinger), mais cela implique de parler des Sobolev dans les leçons sur l'analyse fonctionnelle et des distributions dans l'analyse de Fourier. Elle oriente donc toutes les leçons d'analyse. Dans le cas contraire, elle est peu rentable car isolée. Les leçons 182 et 183 sont assez isolées aussi, elles nécessitent de faire des développements de géométrie élémentaire comme "Ellipse de Steiner", et c'est moche !

Je pense que c'est risqué de faire l'impasse sur les probabilités, qui représentent 5 leçons sur 38 d'analyse. De plus, elles interviennent naturellement dans beaucoup de leçons comme 234, 239 ou 250.

# Chapitre 1

# Leçons d'algèbre

## 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

**Développements** :
- Théorème de Sylow
- Réciprocité quadratique

**Références** : Ulmer 2012, Caldero et Germoni 2013, Perrin 1996.

**Plan** :

### 1 Définition et premières propriétés

(a) *Actions de groupes* : Ulmer 2012. Définition d'une action à gauche/à droite, se donner une action de $G$ sur $X$ est comme se donner un morphisme dit structurel de $G$ dans $\mathfrak{S}(X)$. Exemples : action de $\mathfrak{S}(X)$ sur $X$, action triviale, action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $V$. Définition d'un point fixe, d'une orbite, d'un stabilisateur. Définition d'une action libre, fidèle, transitive. Définition d'une action $k$-transitive. Dans Perrin 1996, l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1,n]\!]$ est $n$-transitive, l'action de $\mathfrak{A}_n$ sur ce même ensemble est $n-2$ transitive. Action transitive mais pas libre du groupe diédral sur le polygône régulier à $n$ sommets. Si $G$ agit sur $X$, relation d'équivalence sur $X$ dont les classes sont les orbites, permettant de définir le quotient $X/G$. Application dans Perrin 1996, toute permutation est produit de cycles à supports disjoints. Si $G$ agit sur $X$ de morphisme structurel $\varphi$, alors $\ker\varphi = \bigcap_{x\in X} G_x$, donc une action libre est fidèle. Contre-exemple de l'action de $D_3$ sur le polygône régulier à trois côtés qui est fidèle mas non libre.

(b) *Action d'un groupe fini sur un ensemble fini* : Ulmer 2012. Bijection donnant la relation stabilisateur-orbite. Formule des classes. Formule de Burnside. Application : si $G$ est un $p$-groupe agissant sur $X$ fini, alors $|X^G| \equiv |X|[p]$. Théorème de Cauchy (il existe un élément d'ordre $p$ dans $G$). Le centre d'un $p$-groupe fini est non trivial. Un groupe d'ordre $p^2$, $p$ premier, est toujours abélien.

### 2 Actions de groupes et théorie des groupes

(a) *Action par translation* : Ulmer 2012. Action par translation de $G$ sur lui-même. C'est une action libre et transitive ; application : théorème de Cayley. Action transitive par translation de $G$ sur $G/H$. Application : $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$. Dans Perrin

1996, théorème de Lagrange. Si $G$ est fini d'ordre $n$ et $H \subset G$ d'indice $k$ tel que $n \nmid k!$ alors $G$ n'est pas simple.

(b) *Action par conjugaison* : ULMER 2012. Action par conjugaison de $G$ sur lui-même, les orbites sont appelées classes de conjugaison et les stabilisateurs centralisateurs. Cette action n'est ni libre ni transitive si $G$ n'est pas trivial. Classes de conjugaison du groupe diédral $D_n$ en fonction de la parité de $n$. Dans PERRIN 1996, classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$. Simplicité de $\mathfrak{A}_n$.

(c) *Théorèmes de Sylow* : PERRIN 1996. Le baratin habituel, un $p$-Sylow est distingué ssi c'est l'unique $p$-Sylow de $G$, il n'y a pas de groupe simple d'ordre 255. Dans les exercices, un groupe d'ordre $n < 60$ n'est simple que s'il est de la forme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $p$ premier.

## 3 Actions de groupes en algèbre linéaire

(a) *Actions sur les espaces de matrices* : CALDERO et GERMONI 2013. idem 150 en résumé

(b) *Théorie des représentations* : ULMER 2012. Définition d'une représentation de groupe, du caractère associé, du degré. Exemple de la représentation régulière. Définition d'une représentation irréductible, théorème de Maschke. Sous-groupes distingués et caractères, et application aux sous-groupes distingués de $D_6$.

# 102 : Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.

**Développements** :

- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques
- Théorème de structure des groupes abéliens finis

**Références :** Arnaudiès-Fraysse, AUDIN 2006, PERRIN 1996, PEYRÉ 2004, DEMAZURE 2008, COLMEZ 2011. Secondaires : DUVERNEY 2007, SAMUEL 1967, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, GOURDON 2009a.

**Plan :**

## 1 Nombres complexes de module 1

(a) *Le groupe $S^1$* : Arnaudiès-Fraysse. Définition, il est isomorphe à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. L'exponentielle complexe est un morphisme surjectif de noyau $2\pi\mathbb{Z}$. Sans référence (?) : $(r,u) \mapsto ru$ est un isomorphisme de groupes de $\mathbb{R}_+^* \times S^1$ dans $\mathbb{C}^*$.

(b) *Trigonométrie et paramétrisation du cercle* : dans Arnaudiès-Fraysse, définition de cos et sin avec les formules d'Euler, petites propriétés (valeurs spécifiques, périodicité, formule de Moivre, cas particulier de $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. Dans GOURDON 2009a, polynômes de Tchebychev, donner les premiers polynômes. Dans DUVERNEY 2007, paramétrisation rationnelle du cercle, application aux triplets pythagoriciens. Dans SAMUEL 1967, il n'y a pas de solution non triviale de $x^4 + y^4 = z^4$. Dans Arnaudiès-Fraysse, définition de l'argument principal et expression explicite avec arctan.

(c) *Rotations et angles* : AUDIN 2006. Définition de $SO_2(\mathbb{R})$, c'est un groupe. Isomorphisme entre $S^1$ et $SO_2(\mathbb{R})$. C'est un groupe commutatif, connexe par arcs. Morphisme $\theta \mapsto R_\theta$ de $\mathbb{R}$ dans $SO_2(\mathbb{R})$, définition de l'angle d'une rotation. Application (FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008) : $\exp : SO_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{A}_2(\mathbb{R})$ est surjective. Transitivité de l'action de $SO_2(\mathbb{R})$ sur le plan, définition de l'angle orienté entre deux vecteurs.

## 2 Racines de l'unité

(a) *Définition* :

(b) *Polynômes et extensions cyclotomiques* : PERRIN 1996. Définition, degré, formule $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_d$. Donner les premiers polynômes cyclotomiques. Application : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Théorème de Wedderburn. Lien entre polynôme cyclotomique sur $\mathbb{Q}$ et sur un corps quelconque. Irréductibilité. Corollaire : degré d'une extension cyclotomique, groupe de Galois (GOZARD 1997). Si $\alpha$ et $\beta$ sont des racines primitives respectivement $n$-ième $m$-ième de l'unité, alors $\mathbb{Q}(\alpha) \cap \mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}$. Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet (admis). Dans DEMAZURE 2008, décomposition en facteurs irréductibles de $\phi_{n,\mathbb{F}_q}$.

(c) *Groupe diédral* : ULMER 2012. Définition, c'est un groupe engendré par la symétrie axiale d'axe $(Ox)$ et la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$.

## 3 Occurences en théorie des représentations

(a) *Représentations et caractères des groupes cycliques* : dans COLMEZ 2011, $G$ est abélien ssi tous les caractères irréductibles de $G$ sont de degré 1, faire remarquer que les caractères irréductibles sont alors des morphismes de $G$ dans $\mathbb{C}^*$ prenant leurs valeurs dans $\mathbb{U}_{|G|}$. Dans PEYRÉ 2004, table de caractères d'un groupe cyclique.

(b) *Table de caractères des groupes abéliens finis* : COLMEZ 2011. Définition de la transformée de Fourier dans un groupe abélien, inversion de Fourier, isomorphisme avec le bidual. Théorème de structure des groupes abéliens finis. Dans SERRE 1998, les représentations irréductibles de $G_1 \times G_2$ sont les produits tensoriels des représentations irréductibles de $G_1$ et $G_2$. Sans référence : la table du groupe de Klein $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

(c) *Transformée de Fourier rapide* : dans PEYRÉ 2004, la définition de la transformée discrète, remarque sur le lien avec la transformée de Fourier dans un groupe cyclique. Formule d'inversion de Fourier discrète. Définition du produit de convolution et compatibilité avec la TFD. Dans CORMEN et al. 2010, l'algorithme de FFT, sa complexité comparée à la complexité naïve. Application : la méthode de multiplication rapide de deux polynômes.

# 103 : Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

**Développements** :

- Théorème de Sylow
- Sous-groupes distingués et table de caractères
- *$SO_3(\mathbb{R})$ est simple*
- *$\mathfrak{A}_n$ est simple*

**Références** : Perrin 1996, Tauvel 2005a, Ulmer 2012, Calais 1998, Beck, Malick et Peyré 2005, Caldero et Germoni 2013.

**Plan** :
**Cadre :** $G$ groupe

## 1 Liens entre sous-groupes distingués et groupes quotients

(a) *Sous-groupes distingués, exemples* : dans Tauvel 2005a, définition des automorphismes intérieurs de $G$, d'un sous-groupe distingué, notation $H \triangleleft G$ ; exemple : $\{e\}$ et $G$ sont distingués, si $G$ est abélien, tous ses sous-groupes sont distingués, le centre de $G$ est distingué, le noyau d'un morphisme de groupes est distingué. Dans Perrin 1996, définition du groupe des quaternions ; sans référence : tous ses sous-groupes sont distingués mais il n'est pas abélien. Dans Calais 1998, théorème du produit direct. Exemple : $\{e\} \triangleleft (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \triangleleft \mathfrak{A}_4 \triangleleft \mathfrak{S}_4$ ce qui montre que la relation "être distingué" n'est pas transitive.

(b) *Quotient et exemples* : dans Tauvel 2005a, définition des classes à gauche et à droite, relations d'équivalences associés, ensembles quotient à gauche et à droite ; ces deux ensembles sont équipotents et s'ils sont finis, on dit que $H$ est d'indice fini ; si $K \subset H \subset G$, relation $(G : K) = (G : H)(H : K)$ ; un sous-groupe d'indice 2 est distingué. Dans Perrin 1996, $\mathfrak{A}_n$ est d'indice 2 dans $\mathfrak{S}_n$. Dans Ulmer 2012, $< r > \subset D_n$ est distingué.

(c) *Lien entre les deux notions* : Ulmer 2012. $H \triangleleft G$ ssi on peut définir une structure de groupe sur $(G/H)_g = (G/H)_d = G/H$ telle que l'application de projection soit un morphisme de groupe. Exemple de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Un sous-groupe $H$ de $G$ est distingué ssi il est le noyau d'un morphisme de source $G$. Dans Calais 1998, correspondances entre les sous-groupes de $G/H$ et les sous-groupes $K$ de $G$ tels que $H \subset K$, exemple des sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Premier théorème d'isomorphisme, application : $\mathbb{C}^* \simeq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ ; $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Dans Beck, Malick et Peyré 2005, théorème de Frobenius-Zolotarev. Deuxième théorème d'isomorphisme et application : $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})/(2\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

## 2 Sous-groupes caractéristiques

(a) *Définition, premières propriétés* : Calais 1998. Définition, notation $H \sqsubset G$. Exemple : le centre de $G$ est caractéristique. Un sous-groupe caractéristique est distingué. Si $H \sqsubset G$ et $K \sqsubset H$, alors $K \sqsubset G$. Rappeler le contre-exemple de la première partie pour montrer qu'on n'a pas ce résultat pour les sous-groupes distingués.

(b) *Groupe dérivé et résolubilité* : Dans Calais 1998, définition du groupe dérivé $D(G)$, si $G$ est abélien, c'est un groupe trivial ; dans Perrin 1996, $D(\mathrm{GL}_n(k)) = \mathrm{SL}_n(k)$ sauf dans quelques cas particuliers ; $D(G) \triangleleft G$ et si $N \triangleleft G$, alors $G/N$ est un groupe abélien ssi $D(G) \subset N$. Dans ULMER 2012, définition de la suite dérivée de $G$, définition de la résolubilité ; un groupe simple non abélien n'est pas résoluble ; les termes de la suite dérivée sont des sous-groupes caractéristiques ; théorème de caractérisation de la résolubilité ; un sous-groupe d'un groupe résoluble est résoluble ; si $N \triangleleft G$, $G$ est résoluble ssi $N$ et $G/N$ sont résolubles. Tout $p$-groupe fini est résoluble. Théorème de Feit-Thompson (admis ! !). Dans PERRIN 1996, suite dérivée de $Q_8$ et $\mathfrak{S}_n$.

**3 Groupes simples et de Sylow**

(a) *Groupes simples* : PERRIN 1996. Définition, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple si $p$ est premier. Un morphisme de $G$ dans $H$ où $G$ est simple, est trivial ou injectif. Dans CALDERO et GERMONI 2013, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geqslant 5$. Les seuls sous-groupes simples d'ordre $< 60$ sont les $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(b) *p-groupes et théorèmes de Sylow* : PERRIN 1996. La séquence classique.

**4 Sous-groupes distingués et représentations** : ULMER 2012. Définition d'une représentation de groupe, du caractère associé, du degré. Exemple de la représentation régulière. Définition d'une représentation irréductible, théorème de Maschke. Sous-groupes distingués et caractères, et application aux sous-groupes distingués de $D_6$.

# 104 : Groupes finis. Exemples et applications.

**Développements** :

- Théorème de Sylow
- Théorème de structure des groupes abéliens finis
- $\mathfrak{A}_n$ *est simple pour* $n \geqslant 5$

**Références** : COMBES 1998, ULMER 2012, PERRIN 1996, **Colmez** PEYRÉ 2004.

On peut rajouter en annexe le tableau avec la classification des groupes de petit cardinal, à la fin de ULMER 2012.

**Plan** :

**Cadre :** $G$ groupe fini.

## 1 Premiers outils d'étude des groupes finis

(a) *Ordre d'un groupe, d'un élément* : dans ULMER 2012, définition de l'ordre d'un groupe et d'un élément $g \in G$, noté $o(g)$. Exemples : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est d'ordre $n$, $\mathfrak{S}_n$ est d'ordre $n!$. $g^k = e \Leftrightarrow o(g) \mid k$.

(b) *Théorème de Lagrange* : dans ULMER 2012, définition de l'indice d'un sous-groupe de $G$, exemple : $(\mathbb{Z} : 2\mathbb{Z}) = 2$. Relation $|G| = (G : H)|H|$ si $H$ et $G$ sont finis. Théorème de Lagrange. Un sous-groupe d'indice 2 est distingué. Les groupes non abéliens d'ordre 8 sont $D_4$ et $Q_8$. Tout groupe d'ordre $p$ premier est de la forme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(c) *Actions de groupes* : ULMER 2012. Définition d'une action à gauche/à droite, se donner une action de $G$ sur $X$ est comme se donner un morphisme dit structurel de $G$ dans $\mathfrak{S}(X)$. Exemples : action de $\mathfrak{S}(X)$ sur $X$, action triviale, action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $V$. Définition d'un point fixe, d'une orbite, d'un stabilisateur. Définition d'une action libre, fidèle, transitive. Action transitive mais pas libre du groupe diédral sur le polygône régulier à $n$ sommets. Si $G$ agit sur $X$ de morphisme structurel $\varphi$, alors $\ker \varphi = \bigcap_{x \in X} G_x$, donc une action libre est fidèle. Contre-exemple de l'action de $D_3$ sur le polygône régulier à trois côtés qui est fidèle mas non libre. Action de $G$ sur lui-même par translation et théorème de Cayley. Relation stabilisateur-orbite. Formule des classes. Formule de Burnside.

## 2 $p$-groupes, produits de groupes et théorème de Sylow

(a) *p-groupes* : ULMER 2012. Définition d'un $p$-groupe fini. Si $G$ est un $p$-groupe agissant sur $X$ fini, alors $|X^G| \equiv |X|[p]$. Théorème de Cauchy (il existe un élément d'ordre $p$ dans $G$). Le centre d'un $p$-groupe fini est non trivial. Un groupe d'ordre $p^2$, $p$ premier, est toujours abélien.

(b) *Produits de groupes* : dans ULMER 2012, théorème de factorisation en produit direct, exemple de $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{A}_3 \times < (12) >$ ; théorème chinois, contre-exemple : $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Dans PERRIN 1996, définition du produit semi-direct de deux groupes, et théorème de factorisation en produit semi-direct.

(c) *Théorèmes de Sylow* : le baratin habituel. Dans COMBES 1998, classification des groupes d'ordre $pq$.

## 3 Groupes abéliens finis

(a) *Groupes cycliques* : COMBES 1998. Définition, si $G =< a >$, alors $a^k$ est d'ordre $\frac{|G|}{|G| \wedge k}$, donc $G$ a $\varphi(|G|)$ générateurs. Exemple des générateurs de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$. Deux groupes cycliques sont isomorphes ssi ils ont même ordre. Automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sous groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, corollaire : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, application (PERRIN 1996) : $\mathbb{F}_q^\times$ est cyclique.

(b) *Théorème de structure* : dans COLMEZ 2011, le théorème de structure des groupes abéliens finis. Dans COMBES 1998, les groupes abéliens d'ordre 600.

**4 Quelques groupes remarquables**

(a) *Groupe des permutations* : ULMER 2012. Définition du support d'une permutation, toute permutation est produit de cycles à supports disjoints, exemple d'une telle décomposition. $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $(1i)$, $i \geqslant 2$. Définition du type d'une permutation, deux permutations sont conjuguées ssi elles ont le même type. Dans PERRIN 1996, automorphismes de $\mathfrak{S}_n$, définition de $\mathfrak{A}_n$, il est simple si $n \geqslant 5$ ; $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles.

(b) *Groupes diédraux* : ULMER 2012. Définition du groupe diédral comme groupe des isométries affines laissant le polygone régulier à $n$ côtés invariant. Générateurs de $D_n$ et définition par générateurs de relations. Classes de conjugaisons de $D_n$.

**5 Représentations des groupes finis** : ULMER 2012 et COLMEZ 2011, PEYRÉ 2004. Définition d'une représentation, d'un caractère, théorème de Maschke, lien entre caractères et sous-groupes distingués, exemple de la table de caractères de $D_6$.

# 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

**Développements** :
- $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geqslant 5$
- Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$

**Références** : PERRIN 1996, ULMER 2012, COMBES 1998

**Plan** :

## 1 Groupe des permutations

(a) *Définitions et propriétés* : dans ULMER 2012, définition du groupe des permutations $\mathfrak{S}(E)$ d'un ensemble $E$ et cas particulier de $\mathfrak{S}_n$ avec $E = [\![1,n]\!]$ ; cardinal de $\mathfrak{S}_n$, notation de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sous la forme $\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ ; deux ensembles en bijection ont leurs groupes symétriques isomorphes ; définition du morphisme structurel $\varphi : G \to \mathfrak{S}(E)$ associé à une action de $G$ sur $E$ et théorème de Cayley. Dans PERRIN 1996, l'injection $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(k) \\ \sigma & \longmapsto & u_\sigma : e_i \mapsto e_{\sigma(i)} \end{array}$ et la conséquence : existence d'un $p$-Sylow dans tout groupe. Dans ULMER 2012, action naturelle de $\mathfrak{S}_n$ sur $[\![1,n]\!]$ et relation $\bigcap_{i=m+1}^{n} \mathrm{Stab}(i) \simeq \mathfrak{S}_m$ permettant d'affirmer que $\mathfrak{S}_m \subset \mathfrak{S}_n$.

(b) *Orbites et cycles* : ULMER 2012. Définition du support d'une permutation, deux permutations à support disjoints commutent, définition d'un cycle de longueur $l$ et notation $(i_1 \dots i_l)$. Relation $(i_1 \dots i_l) = (i_1 i_l) \dots (i_1 i_2)$. Toute permutation s'écrit de façon unique à l'ordre près comme produit de cycles à supports disjoints et exemple d'une telle décomposition. Corollaire : $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions. Définition du type d'une permutation, ordre d'une permutation en fonction de son type et exemple d'application.

(c) *Signature et groupe alterné* : ULMER 2012. Définition de la signature, la signature d'une transposition est $-1$, $\varepsilon$ est l'unique morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$, expression de la signature d'une permutation en fonction de son type. Définition du groupe alterné, il est distingué et d'indice 2. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, théorème de Frobenius-Zolotarev.

## 2 Structure de $\mathfrak{S}_n$ et $\mathfrak{A}_n$

(a) *Classes de conjugaison* : ULMER 2012. Si $\omega \in \mathfrak{S}_n$, $\omega(i_1 \dots i_l)\omega^{-1} = (\omega(i_1) \dots \omega(i_l))$. Deux permutations sont conjugués ssi elles ont le même type. Exemple : énumération des types possibles dans $\mathfrak{S}_4$. Si $n \geqslant 3$, le centre de $\mathfrak{S}_n$ est trivial. Dans PERRIN 1996, si $n \geqslant 3$, les cycles d'ordre 3 sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$, ainsi que les doubles transpositions.

(b) *Générateurs* : ULMER 2012. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ est engendré par : les cycles ; les transpositions ; les transpositions de la forme $(1i)$, $i \geqslant 2$ ; $(12)$ et $(23 \dots n)$ ; $(i\, i+1)$ pour $i \leqslant n-1$. Le groupe alterné est engendré par les cycles $(1ij)$ où $i \neq j \in [\![1,n]\!]$. Si $m$ est impair, le centre de $\mathfrak{A}_m$ est trivial. Dans PERRIN 1996, $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 5$ et $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 2$ ; simplicité de $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 5$ et conséquence : les seuls sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{\mathrm{id}\}$, $\mathfrak{A}_n$ et $\mathfrak{S}_n$ ; les sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$ d'indice $n$ sont isomorphes à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

(c) *Automorphismes* : PERRIN 1996. Un automorphisme de $\mathfrak{S}_n$ qui envoie transposition sur transposition est intérieur. Si $n \neq 6$, $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{S}_n)$ mais ce n'est pas vrai pour $n = 6$ (admis ?).

## 3 Applications en algèbre

(a) *Déterminant* : cf 152. GOURDON 2009a. On se donne $L$ un corps de caractéristique différente de 2. L'ensemble des formes $n$-linéaires alternées sur $K$ forme un $K$-ev de dimension 1, et définition de l'application $\det_{\mathscr{B}}$, une base $\mathscr{B}$ de $K^n$ étant donnée. Définition d'une application antisymétrique/alternée, c'est la même chose. Formule $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{i,\sigma(i)}$. Une famille est liée ssi son déterminant est nul. Déterminant d'une matrice, $\det(A) = \det({}^tA)$, appliquer une permutation $\sigma$ sur les lignes/colonnes revient à multiplier le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$. Exemple du déterminant de Vandermonde.

(b) *Polynômes symétriques* : cf 142, 144. RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1990.

# 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie $E$, sous-groupes de $\mathrm{GL}(E)$. Applications.

**Développements** :
- $SO_3(\mathbb{R})$ est simple
- Étude de $O(p,q)$

**Références** : PERRIN 1996, GOURDON 2009a, CALDERO et GERMONI 2013, MNEIMNÉ et TESTARD 1986. Secondaires : CIARLET 1988

**Plan** :
**Cadre** :$K$ corps commutatif, $E$ $K$-ev de dimension $n$.

## 1 Groupe linéaire et groupe spécial linéaire

(a) *Définition et représentation matricielle* : PERRIN 1996. Définition du groupe linéaire, isomorphisme $u \mapsto M_{\mathscr{B}}(u)$ de représentation matricielle dans une base donnée. Dans GOURDON 2009a, définition du déterminant, $f \in \mathrm{GL}(E) \iff \det f \neq 0$, $\det : \mathrm{GL}(E) \to K^*$ est un morphisme de groupes. Le noyau de det est le groupe spécial linéaire, suite exacte permettant de dire que $\mathrm{GL}(E) \simeq \mathrm{SL}(E) \rtimes K^*$. Cardinaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q)$.

(b) *Parties génératrices* : PERRIN 1996. Définition d'une transvection, d'une dilatation, effet d'une conjugaison sur une transvection. $\mathrm{SL}(E)$ est engendré par les transvections, $\mathrm{GL}(E)$ est engendré par les transvections et dilatations. Dans CIARLET 1988, l'algorithme du pivot de Gauss, il est en $O(n^3)$ opérations, dire que ça sert à résoudre des systèmes linéaires ou calculer l'inverse d'une matrice.

(c) *Sous-groupes remarquables de* $\mathrm{GL}(E)$ : PERRIN 1996. Groupes dérivés de $\mathrm{GL}_n$ et $\mathrm{SL}_n$. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, application au théorème de Frobenius-Zolotarev. Centre de $\mathrm{GL}(E)$, définition du groupe projectif linéaire, c'est un groupe simple sauf exceptions (admis). Cardinal de $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{F}_q)$. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale forme un $p$-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, plongement d'un groupe $G$ quelconque dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, existence d'un $p$-Sylow.

## 2 Action de $\mathrm{GL}(E)$ sur les espaces de matrices : cf 150.

(a) *Action par équivalence* : CALDERO et GERMONI 2013. Définition de l'action, deux matrices sont dans la même orbite si ils représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Le rang est un invariant complet de l'action par équivalence. Dans GOURDON 2009a, les $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des représentants des orbites. Si $O_r$ est l'ensemble des matrices de rang $r$, $\overline{O_r} = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant r} O_k$. Semi-continuité inférieure du rang.

(b) *Action par conjugaison* : CALDERO et GERMONI 2013. Définition de l'action, le polynôme minimal et le polynôme caractéristique sont des invariants par cette action, contre-exemple de deux matrices non semblables ayant même polynôme minimal. $A$ est diagonalisable ssi son polynôme minimal est scindé à racines simples. Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent. Deux endomorphismes nilpotents sont semblables ssi ils ont même réduite de Jordan : les réduites de Jordan forment donc un système de représentants des orbites. Théorème de réduction de Frobenius, suivi de sa version matricielle. Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude. Toute matrice est semblable à sa transposée.

(c) *Action par congruence* : CALDERO et GERMONI 2013. Définition de l'action par congruence, interprétation en termes de formes quadratiques. Classification sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$. Application à la classification des coniques non dégénérées (GRIFONE 2011). Classification sur $\mathbb{F}_q$, application à la loi de réciprocité quadratique.

## 3 Étude du groupe orthogonal

(a) *Parties génératrices* : PERRIN 1996. Définition de $O_n(\mathbb{R})$ comme un stabilisateur. Dans MNEIMNÉ et TESTARD 1986, $O_n(\mathbb{R})$ est compact, $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe. Dans CALDERO et GERMONI 2013, centre de ces deux groupes, $O_n(\mathbb{R})$ est engendré par les réflexions orthogonales, $SO_n(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. Groupes dérivés.

(b) *Décomposition polaire* : CALDERO et GERMONI 2013. Énoncé, $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal, expression de la norme $\|\cdot\|_2$ d'une matrice à l'aide du rayon spectral. L'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Étude de $O(p,q)$.

## 4 Topologie de $\mathrm{GL}_n(K)$, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

(a) *Densité* : MNEIMNÉ et TESTARD 1986. $\mathrm{GL}_n(K)$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(K)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Application : $\forall A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \chi_{AB} = \chi_{BA}$.

(b) *Connexité et compacité* : MNEIMNÉ et TESTARD 1986. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est connexe et est une des deux composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices de rang $r$ est connexe.

# 107 : Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

**Développements** :
- Théorème de structure des groupes abéliens finis
- Sous-groupes distingués et table de caractères

**Références** : COLMEZ 2011, SERRE 1998, ULMER 2012, PEYRÉ 2004.

**Plan** :
**Cadre :** $G$ groupe fini d'ordre $n$

## 1 Représentations d'un groupe fini

(a) *Définition et premiers exemples* : dans ULMER 2012, définition d'une représentation et de son degré, exemple de la représentation triviale et de la représentation régulière ; définition d'une représentation fidèle. Dans COLMEZ 2011, si $\rho$ est une représentation de $G$, tous les $\rho(g)$ sont diagonalisables dans une même base ; exemple des représentations de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$. Dans ULMER 2012, définition d'un morphisme de représentations, notation $\mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$ ; exemple de l'opérateur de moyenne.

(b) *Opérations sur les représentations* : dans COLMEZ 2011, définition de la somme directe de deux représentations ; représentation $Hom(V_1,V_2)$ si $(V_1,\rho_1)$ et $(V_2,\rho_2)$ sont deux représentations de $G$, cas particulier de la représentation duale. Dans ULMER 2012, notation $V^G$ pour l'ensemble des points fixes de la représentation $V$. Dans COLMEZ 2011, $(\mathrm{Hom}(V_1,V_2))^G = \mathrm{Hom}_G(V_1,V_2)$.

(c) *Sous-représentations et représentations irréductibles* : ULMER 2012. Définition d'une sous-représentation, exemple du noyau et de l'image d'une représentation. Définition d'une représentation irréductible, complètement réductible. Dans COLMEZ 2011, $V^G$ est une sous-représentation de $V$, les représentations de degré 1 sont irréductibles ; si $(V,\rho)$ est une représentation de $G$, il existe un produit scalaire sur $V$ invariant sous l'action de $G$ ; théorème de Maschke. Dans ULMER 2012, exemple de la décomposition de la représentation par permutation de $\mathfrak{S}_3$. Dans COLMEZ 2011, lemme de Schur.

## 2 Caractères des groupes finis

(a) *Définition et premières propriétés* : dans ULMER 2012, définition d'une fonction centrale, notation $R_{\mathbb{C}}(G)$ pour l'ensemble des fonctions centrales, qui forme un $\mathbb{C}$-ev ; définition du caractère d'une représentation. Deux représentations isomorphes ont même caractères. Dans COLMEZ 2011, caractère d'une somme directe de deux représentations, de $\mathrm{Hom}(V_1,V_2)$ ; le caractère $\chi_V$ est un morphisme de groupes de $G$ dans $\mathbb{C}^*$ ssi il est de degré 1 ; caractère de la représentation de permutation associée à l'action de $G$ sur un ensemble $X$.

(b) *Orthogonalité des caractères* : COLMEZ 2011. Produit scalaire sur l'espace des fonctions centrales, les caractères irréductibles de $G$ en forment une base orthonormée. Le nombre de représentations irréductibles de $G$ est égal au nombre de classes de conjugaison de $G$. Décomposition canonique d'une représentation en somme directe de représentations irréductibles. Deux représentations ayant même caractère sont isomorphes. Caractère de la représentation régulière. Relations de Burnside.

(c) *Table de caractères* : PEYRÉ 2004. Définition d'une table de caractères, elle constitue une matrice orthogonale. Table de caractères d'un groupe cyclique, du groupe diédral, et d'autres exemples au choix (il y en a dans SERRE 1998).

### 3 Représentations et théorie des groupes

(a) *Sous-groupes distingués* : dans ULMER 2012, sous-groupes distingués et caractères, application à $D_6$ et à $\mathfrak{A}_4$ (PEYRÉ 2004), caractérisation de la simplicité par la table de caractères.

(b) *Groupes abéliens* : dans ULMER 2012, si $G$ est abélien, il a $|G|$ caractères irréductibles, tous de degré 1 ; si $G$ est non abélien, les caractères de degré 1 de $G$ sont issus des caractères irréductibles de $G/D(G)$ ; le groupe des quaternions a donc 4 caractères irréductibles, et un caractère de degré 2. Dans SERRE 1998, produit tensoriel de représentations, et table de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ (sans référence). Dans COLMEZ 2011, définition du dual d'un groupe abélien, transformée de Fourier, isomorphisme entre $G$ et $\hat{\hat{G}}$ ; théorème de structure des groupes abéliens finis.

# 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

- $SO_3(\mathbb{R})$ est simple
- Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$
- $\mathfrak{A}_n$ *est simple*

**Références** : ULMER 2012, PERRIN 1996, COMBES 1998

**Plan** :

1 **Générateurs et relations** : dans PERRIN 1996, la définition d'un groupe engendré par une partie $A$, exemple du groupe dérivé. Dans ULMER 2012, la définition du groupe libre engendré par un ensemble, la propriété universelle du groupe libre ; définition d'une présentation par générateurs et relations d'un groupe, exemple de $G =< x, y \mid xyx^{-1}y^{-1} = e >\simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

2 **Groupes abéliens**

(a) *Groupes monogènes et groupes cycliques* : dans PERRIN 1996, la définition d'un groupe monogène, il est isomorphe soit à $\mathbb{Z}$ soit à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Sans référence : la présentation par générateurs et relations de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans PERRIN 1996, les générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et les automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Dans COMBES 1998, les sous-groupes d'un groupe cyclique, application : $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Dans PERRIN 1996, $\mathbb{F}_q^\times$ est cyclique. Dans COMBES 1998, un produit de groupes cycliques d'ordres deux à deux premiers entre eux est cyclique, nombre de morphismes entre deux groupes cycliques.

(b) *Groupes abéliens finis* : COMBES 1998. Le théorème de structure des groupes abéliens finis. Exemple : groupes abéliens d'ordre 600. Si $G$ est abélien d'ordre $n = \prod p_i^{\alpha_i}$ alors pour tout $i$ il existe un unique sous-groupe $H_i$ d'ordre $p_i^{\alpha_i}$ et $G = H_1 \times \cdots \times H_r$.

3 **Groupes symétriques et diédraux**

(a) *Groupes symétrique et alterné* : PERRIN 1996. Définition de ces deux groupes. Les transpositions de la forme $(1i)$, $i \geqslant 2$ engendrent $\mathfrak{S}_n$. Les cycles d'ordre 3 engendrent $\mathfrak{A}_n$. Les permutations $(12)$ et $(12\ldots n)$ engendrent $\mathfrak{S}_n$. Application : $D(\mathfrak{A}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 5$ et $D(\mathfrak{S}_n) = \mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 2$. Simplicité de $\mathfrak{A}_n$. Automorphismes de $\mathfrak{S}_n$.

(b) *Groupes diédraux* : ULMER 2012. Définition comme groupe des isométries affines conservant le polygône régulier à $n$ côtés, description des générateurs et présentation par générateurs et relations. Le sous-groupe engendré par la rotation $r$ est distingué. Groupes dérivés du groupe diédral $D_n$ selon la parité de $n$. Table de caractères de $D_n$ dans PEYRÉ 2004.

4 **Autour du groupe linéaire**

(a) *Groupe linéaire et groupe spécial linéaire* : PERRIN 1996. Série d'équivalences définissant une dilatation, une transvection. Si $\tau$ est une transvection de droite $D$ et d'hyperplan $H$, alors $u\tau u^{-1}$ est une transvection de droite $u(D)$ et d'hyperplan

$u(H)$. Centre de $\mathrm{GL}(E)$ et $\mathrm{SL}(E)$, définition de $\mathrm{PGL}(E)$ et $\mathrm{PSL}(E)$. Les transvections engendrent $\mathrm{SL}(E)$, les transvections et dilatations engendrent $\mathrm{GL}(E)$. Dans CIARLET 1988, l'algorithme du pivot de Gauss et sa complexité en $O(n^3)$, dire à quoi correspond la multiplication à gauche/à droite par une matrice de transvection ; exemple d'application. Groupes dérivés de $\mathrm{GL}_n$ et $\mathrm{SL}_n$. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, théorème de Frobenius-Zolotarev. Dans MNEIMNÉ et TESTARD 1986, connexité par arcs de $\mathrm{SL}_n(K)$ si $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, composantes connexes de $\mathrm{GL}_n(K)$.

(b) *Le groupe orthogonal* : PERRIN 1996. Définition de $O(E)$. Définition d'une symétrie, d'une réflexion, d'un retournement. Caractérisation des symétries orthogonales. Théorème de Cartan-Dieudonné. $SO(E)$ est engendré par les retournements. Centre de $O(E)$ et de $SO(E)$. Les symétries orthogonales sont deux à deux conjuguées. Groupe dérivé de $O(E)$ et $SO(E)$. Dans CALDERO et GERMONI 2013, simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$. Connexité par arcs de $SO_n(\mathbb{R})$.

# 110 : Caractères d'un groupe abélien fini et transformée de Fourier discrète. Applications.

**Développements** :
- Théorème de structure des groupes abéliens finis
- Formule de Poisson discrète

**Références** : PEYRÉ 2004, COLMEZ 2011, ULMER 2012, CORMEN et al. 2010.

**Plan** :
**Cadre :** $G$ groupe abélien fini.

## 1 Caractères des groupes abéliens finis

(a) *Caractères et représentations* : COLMEZ 2011. Définition d'une représentation, du caractère associé, du degré du caractère. Caractère d'une somme directe de représentation, relation $\chi_V(1) = \dim V$, $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$. Définition d'une fonction sur $G$, notation $R_{\mathbb{C}}(G)$ pour désigner le $\mathbb{C}$-ev des fonctions centrales. Un caractère est une fonction centrale. Définition des caractères linéaires, exemple du caractère trivial. Définition d'un caractère irréductible, tout caractère de $G$ est somme de caractères irréductibles.

(b) *Orthogonalité des caractères* : COLMEZ 2011. Produit scalaire sur $R_{\mathbb{C}}(G)$ pour lequel les caractères irréductibles forment une base orthonormée. Le nombre de représentations irréductibles de $G$ est égal au nombre de classes de conjugaison de $G$ donc $G$ est abélien ssi toutes les représentations irréductibles sont de degré 1. Deux représentations sont isomorphes ssi elles ont même caractère. Dans PEYRÉ 2004, caractères irréductibles d'un groupe cyclique.

(c) *Table de caractères* : PEYRÉ 2004. Définition de la table de caractères, les colonnes et les lignes sont orthogonales. Table de caractères de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

(d) *Groupes distingués* : ULMER 2012. Si $G$ est non abélien, les caractères de degré 1 sont de la forme $\chi : G \to G/D(G) \to \mathbb{C}^*$, application au groupe des quaternions.

## 2 Dualité et transformée de Fourier sur un groupe abélien fini

(a) *Algèbre d'un groupe abélien* : PEYRÉ 2004. Définition de $\mathbb{C}[G]$, qui, munie du produit de convolution, est une $\mathbb{C}$-algèbre. Base $(\delta_g)_{g\in G}$ de $\mathbb{C}[G]$. Tout morphisme de groupes de $G$ dans $\mathbb{C}^*$ se prolonge de manière unique en un morphisme d'algèbres de $\mathbb{C}[G]$ dans $\mathbb{C}$. $\dim \mathbb{C}[G] = |G|$.

(b) *Dual d'un groupe* : PEYRÉ 2004. Définition du dual de $G$, noté $\hat{G}$. Sans référence : les éléments du dual sont les caractères irréductibles. Les éléments de $\hat{G}$ sont les morphismes de $G$ dans $\mathbb{U}_n$, exemple : $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. $\hat{G}$ est une base orthonormée de $\mathbb{C}[G]$. Dans COLMEZ 2011, $|\hat{G}| = |G|$, isomorphisme de $G$ dans $\hat{\hat{G}}$ et théorème de structure des groupes abéliens finis.

(c) *Transformée de Fourier* : PEYRÉ 2004. Définition de la transformée de Fourier de $f \in \mathbb{C}[G]$, cela définition un morphisme de $\mathbb{C}[G]$ dans $\mathbb{C}[\hat{G}]$. Si $\chi \in \hat{G}$ est fixé, $f \in \mathbb{C}[G] \mapsto \hat{f}(\chi)$ est l'unique manière d'étendre le morphisme de groupes $\chi$ en un morphisme d'algèbres. $\widehat{f \star g} = \hat{f} \star \hat{g}$. Formule d'inversion de Fourier. Formule de Plancherel. Formule de Poisson discrète.

## 3 Transformée de Fourier discrète

(a) *Généralités* : Peyré 2004. Le but est, étant donné $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un signal, d'approcher la transformée de Fourier de $f$. Définition de la TFD d'un échantillon $f = (f[n])_{n=0\dots N-1}$. C'est un cas particulier de transformée de Fourier sur un groupe $G =< \omega_N >$ avec $\omega_N$ une racine $N$-ième de l'unité. Formule d'inversion de Fourier et formule de Plancherel reformulées dans ce contexte. Définition du produit de convolution sur $\mathbb{C}^N$ et comportement de la TFD vis à vis de ce produit.

(b) *Principe de la transformée de Fourier rapide* : Cormen et al. 2010. Décrire l'algorithme, sa complexité est en $O(N \ln N)$, alors que l'algorithme naïf nécessite $O(N^2)$ opérations. Remarquer que le même algorithme permet de calculer la TFD inverse.

(c) *Multiplication rapide de polynômes* : Cormen et al. 2010. Remarquer qu'avec l'identification $\mathbb{C}_N[X] \simeq \mathbb{C}^N$, si $A, B$ sont deux polynômes, $AB = A \star B$. Schéma expliquant la multiplication rapide.

# 120 : Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.

**Développements** :
- Chevalley-Warning et EGZ
- Réciprocité quadratique
- *Théorème des deux carrés*
- *Irréductibilité des polynômes cyclotomiques*

**Références** : RISLER et BOYER 2006, PERRIN 1996, GOZARD 1997, DEMAZURE 2008. Secondaires : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, CALDERO et GERMONI 2013.

**Plan** :
**Cadre :** $n \geqslant 2$ entier.

## 1 Structure de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

(a) *Structure de groupe* : RISLER et BOYER 2006. Définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est un groupe fini d'ordre $n$. Tout groupe cyclique est isomorphe à un $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, exemple (sans référence) de l'ensemble des racines $n$-ièmes de l'unité. Sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et leurs générateurs. Quotients de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Exemple (sans référence) : notion de racine primitive $n$-ième de l'unité. Indicatrice d'Euler, définie comme nombre de générateurs, expression explicite. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il y a exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre $d$, formule $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$. Application (PERRIN 1996) : cyclicité de $\mathbb{F}_q^\times$. Dans COLMEZ 2011, théorème de structure des groupes abéliens finis. Dans COMBES 1998, groupes abéliens d'ordre 24.

(b) *Structure d'anneau* : RISLER et BOYER 2006. Définition de la loi multiplicative, du groupe des inversibles, c'est aussi l'ensemble des générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Si $p$ est premier, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps noté $\mathbb{F}_p$, contre-exemple (sans référence) : dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\overline{2} \times \overline{3} = \overline{0}$. Dans PERRIN 1996, automorphismes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Conditions pour qu'il existe un morphisme $\phi : \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ tel que $\phi(1) = x$ (dans les exos), corollaire : nombre de morphismes de $\mathbb{Z}/p^a\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p^bZ$ quand $p$ est premier.

(c) *Théorème chinois et conséquences* : RISLER et BOYER 2006. Le théorème, exemple de résolution d'un système de congruences. L'isomorphisme est également valable concernant le groupe des inversibles, corollaire : si $m$ et $n$ sont premiers entre eux, $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$. Dans PERRIN 1996, si $p$ est premier et $\alpha \geqslant 3$, $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^\times \simeq \mathbb{Z}/p^{\alpha-1}(p-1)\mathbb{Z}$.

## 2 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$ (idem 121)

(a) *Nombres premiers* : RISLER et BOYER 2006. Dans RISLER et BOYER 2006, si $a$ et $n$ sont premiers entre eux, $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$, cas particulier avec $n = p$ premier (petit théorème de Fermat). Si $p$ est premier, $(p-1)! \equiv -1[p]$. Dans ZAVIDOVIQUE 2013, Chevalley-Warning et EGZ.

(b) *Applications en cryptographie* : Dans DEMAZURE 2008, le test de primalité de Fermat, définition des nombres de Carmichaël, exemple de 561 ; test de Miller, au moins 3/4 des entiers entre 1 et $n$ sont des témoins de Miller pour $n$ ; principe de l'algorithme RSA.

(c) *Carrés et sommes de carrés* : PERRIN 1996. Définition de $\mathbb{F}_p^2$, cardinal, $x \in \mathbb{F}_p^{*2} \Leftrightarrow x^{\frac{p-1}{2}} = 1$, donc $-1 \in \mathbb{F}_p^{*2} \Leftrightarrow p \equiv 1[4]$. Application il y a une infinité de premiers de la forme $4k+1, k \in \mathbb{Z}$. L'équation sur $\mathbb{F}_p$ $ax^2 + by^2 = 1$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{F}_p$, application à la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_p$. Dans GOZARD 1997, définition du symbole de Legendre, expressions de $\left(\frac{-1}{p}\right)$ et $\left(\frac{2}{p}\right)$ ; loi de réciprocité quadratique (CALDERO et GERMONI 2013) et exemple d'application. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, théorème de Frobenius-Zolotarev. Théorème des deux carrés.

### 3 Polynômes irréductibles

(a) *Polynômes irréductibles sur* $\mathbb{F}_p$ (idem 123) dans GOZARD 1997, si $p$ est premier, $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p[X]/(P)$ si $P$ est irréductible de degré $n$. Il existe donc des polynômes irréductibles de tout degré dans $\mathbb{F}_p[X]$. Dans TAUVEL 2008, l'étude des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. Dans GOZARD 1997, exemples de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$. Dans PERRIN 1996, $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_p$ ; un polynôme $P \in \mathbb{F}_q[X]$ de degré $n$ est irréductible ssi il n'a pas de racines dans les extensions $L$ de $\mathbb{F}_q$ de degré inférieur à $\frac{n}{2}$. Exemple : $X^4 + 1$ est réductible sur $\mathbb{F}_p$ pour tout $p$ premier.

(b) *Irréductibilité sur* $\mathbb{Z}$ *et* $\mathbb{Q}$ : PERRIN 1996. Critère d'Eisenstein, exemple de $1 + X + \cdots + X^{p-1}$, critère de réduction modulo $p$, $X^p - X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$. Contre-exemple : $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$, bien que réductible modulo $p$ pour tout $p$.

(c) *Polynômes cyclotomiques* : PERRIN 1996. Définition des polynômes cyclotomiques sur un corps quelconque $k$, ses coefficients sont dans le corps premier. Formule $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_{d,k}(X)$, $\phi_{d,k}$ est de degré $\varphi(d)$. Si $\sigma : \mathbb{Z} \to k$ est le morphisme canonique, $\phi_{n,k}(X) = \sigma(\phi_{n,\mathbb{Q}}(X))$. Irréductibilité de $\varphi_n$, application au calcul de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ quand $\zeta$ est une racine primitive $n$-ième de l'unité. Décomposition de $\phi_n$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_q[X]$ (DEMAZURE 2008).

# 121 : Nombres premiers. Applications.

**Développements** :

- Théorème des deux carrés
- Réciprocité quadratique

**Références** : GOURDON 2009a, DEMAZURE 2008, AMAR et MATHERON 2003, RISLER et BOYER 2006, GOZARD 1997, ZAVIDOVIQUE 2013, CALDERO et GERMONI 2013, PERRIN 1996, ULMER 2012.

**Plan** :
**Cadre :** on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

## 1 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

(a) *Généralités sur les nombres premiers* : GOURDON 2009a. Définition d'un nombre premier, de nombres premiers entre eux. Si $p$ est premier et ne divise pas $a$, alors $p$ et $a$ sont premiers entre eux. Corollaire : si $p \mid a_1 \dots a_n$ et $p$ premier, alors il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $p \mid a_i$. Théorème de Bézout. Si $p$ est premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$, alors $p \mid \binom{k}{p}$. Théorème de décomposition en facteurs premiers, expression du pgcd et du ppcm à l'aide de cette décomposition. Un entier $n$ est premier s'il n'est divisible par aucun élément de $[\![2, \sqrt{n}]\!]$.

(b) *Dénombrement et localisation des nombres premiers* : dans GOURDON 2009a, il y a une infinité de nombres premiers ; admis : si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $ak+b$, $k \in \mathbb{N}$. Exemple : il y a une infinité de nombres premiers de la forme $6k-1$, $k \in \mathbb{N}$. Dans AMAR et MATHERON 2003, définition de la fonction $\zeta$ et expression en produit infini sur $\mathscr{P}$. Corollaire : $\sum_{p \in \mathscr{P}} \frac{1}{p}$ est une série divergente. Dans GOURDON 2009a, le théorème des nombres premiers (admis).

(c) *Fonctions arithmétiques* : DEMAZURE 2008. Définition d'une fonction multiplicative, définition de l'indicatrice d'Euler, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ si $p$ est premier. $\varphi$ est multiplicative, expression pour $n$ quelconque. Définition de la fonction de Möbius, c'est une fonction multiplicative. Inversion de Möbius, application à l'expression de $\varphi$.

## 2 Corps finis

(a) *Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et cryptographie* : dans GOURDON 2009a, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps ssi $n$ est premier, notation $\mathbb{F}_p$. Dans RISLER et BOYER 2006, si $a$ et $n$ sont premiers entre eux, $a^{\varphi(n)} \equiv 1[n]$, cas particulier avec $n = p$ premier. Dans DEMAZURE 2008, le test de primalité de Fermat, définition des nombres de Carmichaël, exemple de 561 ; test de Miller, au moins 3/4 des entiers entre 1 et $n$ sont des témoins de Miller pour $n$ ; principe de l'algorithme RSA.

(b) *Théorie élémentaire des corps finis* : PERRIN 1996. Définition de la caractéristique d'un corps, cardinal d'un corps fini de caractéristique $p$. Il existe un unique corps $\mathbb{F}_{p^n}$ à $p^n$ éléments. Définition du morphisme de Frobenius. Dans GOZARD 1997, groupe de Galois de $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$. Cyclicité de $\mathbb{F}_q^\times$. Dans ZAVIDOVIQUE 2013, théorème de Chevalley-Warning et EGZ.

(c) *Carrés dans* $\mathbb{F}_p$ : cf 120. PERRIN 1996. Définition de $\mathbb{F}_p^2$, cardinal, $x \in \mathbb{F}_p^{*2} \Leftrightarrow x^{\frac{p-1}{2}} = 1$, donc $-1 \in \mathbb{F}_p^{*2} \Leftrightarrow p \equiv 1[4]$. Application il y a une infinité de premiers de la forme $4k+1, k \in \mathbb{Z}$. L'équation sur $\mathbb{F}_p$ $ax^2 + by^2 = 1$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{F}_p$, application à la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_p$. Dans GOZARD 1997, définition du symbole de Legendre, expressions de $\left(\frac{-1}{p}\right)$ et $\left(\frac{2}{p}\right)$ ; loi de réciprocité quadratique (CALDERO et GERMONI 2013) et exemple d'application. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, théorème de Frobenius-Zolotarev. Théorème des deux carrés.

(d) *Polynômes irréductibles* : PERRIN 1996. Critère d'Eisenstein, de réduction modulo $p$ et exemples. idem 120

## 3 Théorie des groupes

(a) *Les p-groupes* : ULMER 2012. Définition d'un $p$-groupe fini, un groupe d'ordre $p$ est cyclique, formule $|X^G| \equiv |X|[p]$ si $G$ est un $p$-groupe agissant sur $G$. Dans PERRIN 1996, expliquer comment tout groupe peut être vu comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ ; un groupe d'ordre $p^2$, $p$ premier est isomorphe à $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ ou à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$.

(b) *Théorème de Sylow* : PERRIN 1996. Définition d'un $p$-Sylow, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale forme un $p$-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, existence d'un $p$-Sylow, théorème de Sylow. Un groupe d'ordre 63 n'est pas simple. Un groupe admet un unique $p$-Sylow ssi il admet un $p$-Sylow distingué.

# 122 : Anneaux principaux. Exemples et applications.

**Développements** :
- Théorème des deux carrés
- Endomorphismes semi-simples

**Références** : Risler et Boyer 2006, Perrin 1996, Beck, Malick et Peyré 2005, Combes 1998, Duverney 2007, Samuel 1967, Tauvel 2005a.

**Plan** :
**Cadre :**$A$ anneau intègre, $K$ corps.

## 1 Anneaux principaux, exemples

(a) *Idéaux et anneaux principaux* : Perrin 1996. Définition d'un idéal principal, $(2, X)$ n'est pas principal dans $\mathbb{Z}[X]$, définition d'un anneau principal. Exemple (Ortiz) : $\mathbb{C}[X,Y]/(XY-1)$ et $\mathbb{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1)$ sont principaux. Un anneau principal est factoriel, mais $\mathbb{Z}[X]$ est factoriel non principal. Définition d'un anneau noethérien, un anneau principal est noethérien. Définition du localisé dans Tauvel 2005a, exemple de l'ensemble des décimaux ; si $A$ est principal, son localisé aussi.

(b) *Cas particulier des anneaux euclidiens* : Perrin 1996. Définition, un anneau euclidien est principal. Exemple de $K[X]$, $A[X]$ est principal ssi $A$ est un corps. Exemple de $\mathbb{Z}$. Dans Tauvel 2005a, le localisé d'un anneau euclidien est euclidien. Dans FGN (exos pour l'agreg), exemple des séries formelles. Exemple (admis) d'un anneau principal non euclidien.

## 2 Arithmétique dans les anneaux principaux On se donne $A$ principal.

(a) *Divisibilité* : Perrin 1996. Définition de la divisibilité dans $A$, $a \mid b \Leftrightarrow (b) \subset (a)$. Définition de la relation d'association, exemple : $K[X]^\times = K^*$ et $\mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$. Bijection entre $A$/assoc. et l'ensemble des idéaux de $A$. Définition d'un élément irréductible, $p$ est irréductible ssi $(p)$ est premier ssi $(p)$ est maximal. Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{K}[[X]]$ (FGN). Dans Tauvel 2005a, définition du ppcm et du pgcd d'une famille. Définition de "premiers entre eux", exemple : si $p$ est premier et $p \nmid a$, alors $p$ et $a$ sont premiers entre eux. Lemme de Gauss et de Bézout. Contre-exemple de $X$ et $Y$ premiers entre eux au sens factoriel dans $K[X,Y]$ mais tels que $(X)+(Y) \neq (1)$. Dans Risler et Boyer 2006, algorithme d'Euclide.

(b) *Application à la notion de polynôme minimal* : dans Perrin 1996, la définition, avec le morphisme d'évaluation, du polynôme minimal de $x \in B$ sur $K$ quand $B$ est une $K$-algèbre, préciser les deux cas usuels : $B = L$ extension de $K$ ou $B = \mathscr{L}(E)$ où $E$ est un $K$-espace vectoriel. Définition du degré d'un élément. Exemple : irréductibilité du polynôme cyclotomique $\phi_n$, c'est donc le polynôme minimal d'un élément. Dans Gourdon 2009a, endomorphismes semi-simples.

## 3 Modules de type fini sur un anneau principal

(a) *Généralités, facteurs invariants* : Risler et Boyer 2006. Soit $A$ anneau principal. Définition d'un $A$-module de type fini, libre de type fini. Exemple de $A$. Définition du rang d'un module libre de type fini. Dans Beck, Malick et Peyré 2005, théorème des invariants de Smith, dire que la preuve est algorithmique dans $A$ euclidien ; théorème de la base adaptée, exemple d'application. Théorème de structure des $A$-modules de type fini, mentionner le théorème de structure des groupes abéliens finis.

(b) *Applications en algèbre linéaire : les $K[X]$-modules* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Définition de la structure de $K[X]$ sur un $K$-espace vectoriel $E$ muni d'un endomorphisme $u$. Interprétation dans le langage des $K[X]$-modules de la notion de stabilité, supplémentaire stable, similitude, semi-simplicité. Si $u$ a pour matrice dans une certaine base une matrice compagnon $C_P$, alors $(E,u) \simeq K[X]/(P)$. Réduction de Frobenius, exemple idiot qui suit. Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont les mêmes invariants de similitude. On retrouve la réduction de Jordan.

## 4 Entiers d'un corps quadratique

(a) *Généralités* : SAMUEL 1967. Définition d'un corps quadratique, il est de la forme $Q(\sqrt{d})$ pour $d \in \mathbb{Z}$ sans facteurs carrés, définition d'un élément entier de ce corps, l'ensemble des entiers $A_d$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ forme un anneau. Description de $A_d$ selon la valeur de $d$ modulo 4. Dans DUVERNEY 2007, application à l'équation de Mordell ; $A_d$ est euclidien muni de $N : x + y\sqrt{d} \mapsto x^2 - dy^2$ si $d = -1, -2, -3, -7, -11$.

(b) *L'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]$* : PERRIN 1996. Le théorème des deux carrés, en précisant les unités et irréductibles de cet anneau euclidien.

# 123 : Corps finis. Applications.

**Développements** :
- Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$
- Chevalley-Warning et EGZ
- *Réciprocité quadratique*

**Références** : GOZARD 1997, PERRIN 1996, TAUVEL 2008, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Secondaires : DEMAZURE 2008, CALDERO et GERMONI 2013

**Plan** :

## 1 Construction et structure des corps finis

(a) *Premières propriétés, existence et unicité* : dans GOZARD 1997, la définition de la caractéristique, d'un corps premier, du sous-corps premier. Un corps fini est de caractéristique non nulle. Cardinal d'un corps fini en fonction de sa caractéristique et de son degré. Dans PERRIN 1996, existence et unicité à isomorphisme près du corps fini à $p^n$ éléments, c'est le corps de décomposition de $X^{p^n} - X$ sur $\mathbb{F}_p$.

(b) *Groupe des inversibles* $\mathbb{F}_q^\times$ : dans PERRIN 1996, cyclicité de ce groupe, conséquence : si $q = p^n$ et $\xi$ est un générateur de $\mathbb{F}_q^\times$, alors $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[\xi]$. Dans DEMAZURE 2008, le test de primalité de Fermat. Remarquer (référence ?) qu'on peut avoir $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p[\theta]$ sans que $\theta$ soit un générateur de $\mathbb{F}_q^\times$.

(c) *Structure de* $\mathbb{F}_q$ : dans GOZARD 1997, sous-corps de $\mathbb{F}_q$, définition de l'automorphisme de Frobenius, groupe de Galois de $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$. Dans SAMUEL 1967, $\mathbb{F}_q$ est un corps parfait.

## 2 Carrés dans $\mathbb{F}_q$

(a) *Généralités* : PERRIN 1996. Définition de $\mathbb{F}_q^2$, cardinal, $x \in \mathbb{F}_q^{*2} \Leftrightarrow x^{\frac{q-1}{2}} = 1$, donc $-1 \in \mathbb{F}_q^{*2} \Leftrightarrow q \equiv 1[4]$. Application il y a une infinité de premiers de la forme $4k+1, k \in \mathbb{Z}$. Théorème des deux carrés.

(b) *Symbole de Legendre* : Dans GOZARD 1997, définition du symbole de Legendre, expressions de $\left(\frac{-1}{p}\right)$ et $\left(\frac{2}{p}\right)$ loi de réciprocité quadratique (CALDERO et GERMONI 2013) et exemple d'application. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, le symbole de Legendre définit l'unique morphisme de groupes non trivial de $\mathbb{F}_p^\times$ dans $\{\pm 1\}$, théorème de Frobenius-Zolotarev. Dans GOURDON 2009a, $\left(\frac{5}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p \equiv \pm 1[10]$, il existe une infinité de premiers de la forme $10n - 1, n \in \mathbb{N}$.

## 3 Polynômes sur $\mathbb{F}_q$

(a) *Clôture algébrique* : GOZARD 1997. $P = \prod_{a \in K}(X - a) + 1$ n'a pas de racines dans $K$ si $K$ est fini donc $K$ n'est pas algébriquement clos. Clôture algébrique des corps finis.

(b) *Polynômes irréductibles* : dans GOZARD 1997, si $p$ est premier, $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p[X]/(P)$ si $P$ est irréductible de degré $n$. Il existe donc des polynômes irréductibles de tout degré dans $\mathbb{F}_p[X]$. Dans TAUVEL 2008, l'étude des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. Dans GOZARD 1997, exemples de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$. Dans PERRIN 1996, un polynôme $P \in \mathbb{F}_q[X]$ de degré $n$ est irréductible ssi il n'a pas de racines dans les extensions $L$ de $\mathbb{F}_q$ de degré inférieur à $\frac{n}{2}$, exemple de $X^4 + X + 1$ sur $\mathbb{F}_2$ ; si $P \in \mathbb{F}_q[X]$ est irréductible de degré $n$, alors si $d$ et $n$ sont premiers entre eux, $P$ est irréductible dans $\mathbb{F}_{q^d}[X]$ ; critère d'irréductibilité par réduction modulo $p$, exemple de $X^p - X - 1$, contre exemple de $X^4 + 1$. Définition des polynômes cyclotomiques et décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_q[X]$ (DEMAZURE 2008).

(c) *Factorisation de polynômes* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Algorithme de Berlekamp et méthode pour "enlever" les facteurs carrés d'un polynôme dans un corps fini.

(d) *Polynômes à plusieurs variables* : ZAVIDOVIQUE 2013 : Chevalley-Warning et EGZ.

## 4 Algèbre linéaire et bilinéaire sur les corps finis

(a) *Groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$* : PERRIN 1996. Le cardinal du groupe linéaire/spécial linéaire sur $\mathbb{F}_q$, application : l'ensemble des matrices triangulaires avec des 1 sur la diagonale forme un $p$-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, tout groupe admet un $p$-Sylow.

(b) *Formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$* : PERRIN 1996. L'équation sur $\mathbb{F}_p$ $ax^2 + by^2 = 1$ admet une infinité de solutions sur $\mathbb{F}_p$, application à la classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_p$. Application : loi de réciprocité quadratique (CALDERO et GERMONI 2013).

# 125 : Extensions de corps. Exemples et applications.

**Développements** :

- Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$
- Théorème d'Artin

**Références** : GOZARD 1997, PERRIN 1996, JEANNERET et LINES 2008, TAUVEL 2008. Secondaire : DEMAZURE 2008.

**Plan** :

## 1 Corps et extensions

(a) *Extension et degré* : GOZARD 1997. Définition d'une extension, $\mathbb{C}$ est une extension de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ est une extension de $\mathbb{Q}$. Définition de la caractéristique d'un corps, $\mathbb{R}$ est de caractéristique 0, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de caractéristique $p$. Sans référence : un corps de caractéristique nulle est infini mais la réciproque est fausse, cf $\mathbb{F}_p(T)$. Degré d'une extension, $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est de degré 2, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ de degré infini. Formule des degrés. Définition d'une extension finie. Si $K/k$ est une extension et $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in K$, définition de $k(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$. Notion d'extension monogène.

(b) *Extensions algébriques* : PERRIN 1996. Définition d'un élément transcendant/algébrique et polynôme minimal. $e$ et $\pi$ sont transcendants (admis). $\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{2}$ sont algébriques, donner leurs polynômes minimaux respectifs. Le polynôme minimal d'un élément algébrique est irréductible. Dans une extension $L/K$, $\alpha \in L$ est algébrique ssi $K(\alpha) = K[\alpha]$ ssi $K[\alpha]/K$ est une extension finie, et dans ce cas $K[\alpha]/K$ est de degré $\deg \Pi_\alpha$. Remarquer que $(1,\alpha,\dots,\alpha^{n-1})$ est une base de $K[\alpha]$ si $n = [K[\alpha] : K]$. Définition d'une extension algébrique, $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est algébrique (GOZARD 1997). Notion de fermeture algébrique. Dans GOZARD 1997, description des extensions quadratiques. On peut éventuellement parler d'entiers algébriques et citer les applications en arithmétiques (équation de Mordell...)

## 2 Adjonction de racines

(a) *Corps de rupture* : GOZARD 1997. Définition. Si $f \in K[X]$ est algébrique de degré 1, $K$ est un corps de rupture de $f$. Existence et unicité à unique isomorphisme près du corps de rupture d'un polynôme irréductible. Tout corps de rupture de $f$ est de degré $\deg f$. $\mathbb{C}$ est le corps de rupture de $X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$. $\mathbb{F}_4$ est le corps de rupture de $X^2+X+1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

(b) *Corps de décomposition* : GOZARD 1997. Définition, $\mathbb{C}$ est un corps de décomposition sur $\mathbb{R}$ de $X^2+1$. Dans PERRIN 1996, si $P = X^3-2$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ n'est pas un corps de décomposition de $P$ mais $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ en est un. Existence et unicité à isomorphisme près du corps de décomposition, majoration de son degré. Un polynôme $P \in K[X]$ de degré $n$ est irréductible ssi il n'a pas de racines dans les extensions $L$ de $K$ de degré inférieur à $\frac{n}{2}$. Corollaire : si $P \in K[X]$ est irréductible de degré $n$, alors si $d$ et $n$ sont premiers entre eux et $L$ est une extension de degré $d$ de $K$, $P$ est irréductible dans $L[X]$ Dans PERRIN 1996, exemple de $X^4+X+1$ sur $\mathbb{F}_2$. Dans PERRIN 1996, Définition des polynômes cyclotomiques sur un corps quelconque $k$, formule $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_{d,k}(X)$, $\phi_{d,k}$ est de degré $\varphi(d)$. Irréductibilité de $\varphi_n$. Dans DEMAZURE 2008, décomposition de $\phi_n$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_q[X]$. Dans PERRIN 1996, l'existence et l'unicité du corps fini à $q = p^n$ élément, c'est le corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$. Si $p$ est premier, $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p[X]/(P)$ si $P$ est irréductible de degré $n$. Il existe donc des polynômes irréductibles de tout degré dans $\mathbb{F}_p[X]$. Dans TAUVEL 2008, l'étude des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. Dans GOZARD 1997, exemples de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$.

(c) *Clôture algébrique* : GOZARD 1997. Série d'équivalences définissant un corps algébriquement clos, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos mais pas $\mathbb{Q}$. Application : irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$. Définition de la clôture algébrique d'un corps, tout corps admet une unique clôture algébrique (admis). Exemple : si $p$ est premier, $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{F}_{p^n}$. La clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ n'est pas $\mathbb{C}$ ! Un corps algébriquement clos est infini.

### 3 Morphismes de corps

(a) *Généralités et exemples* : GOZARD 1997. Si $L/K$ est une extension, définition du groupe des $K$-automorphismes de $L$, groupe de Galois d'une extension monogène, exemple de $\mathbb{C}/\mathbb{R}$, de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}$. Définition du morphisme de Frobenius, il engendre le groupe de Galois de $\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p$. Groupe de Galois de $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ quand $\mathbb{Q}$ est une extension cyclotomique. Lemme d'indépendance de Dedekind et conséquence : si $L/K$ est une extension finie, $\mathrm{Gal}(L/K)$ est fini d'ordre inférieur à $[L : K]$.

(b) *Sous-corps fixe et correspondance* : dans JEANNERET et LINES 2008, le théorème d'Artin.

# 126 : Exemples d'équations diophantiennes

**Développements** :

- Théorème des deux carrés
- Carathéodory et équations diophantiennes
- *Réciprocité quadratique*

**Références** : COMBES 1998, RISLER et BOYER 2006, CALDERO et GERMONI 2013, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, BERHUY 2012

**Plan** :

Dans COMBES 1998, la définition d'une équation diophantienne et l'exemple de l'équation de Fermat $x^n + y^n = z^n$.

## 1 Equations diophantiennes linéaires

(a) *Résolution à une ou deux variables* : COMBES 1998. Sans référence, $ax = b$ admet une solution ssi $a \mid b$. Le lemme de Gauss et le théorème de Bézout. La méthode pour résoudre $ax + by = c$ avec un exemple. Dire qu'on obtient les coefficients de Bézout nécessaires à la résolution par l'algorithme d'Euclide étendu.

(b) *Système d'équations diophantiennes* : le théorème de Carathéodory et application aux équations diophantiennes. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, le théorème de Smith, les facteurs invariants se calculent de manière algorithmique en utilisant la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$. Expliquer (sans réf ?) comment ccela permet de résoudre un système diophantien du type $AX = B, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{Z})$. Dans RISLER et BOYER 2006, un exemple de calcul de facteurs invariants. Dans BERHUY 2012, les solutions de $3x + 4y + 7z = b$.

(c) *Utilisation du lemme chinois* : COMBES 1998. Le théorème chinois, l'application à un résolution de système de congruences, exemple.

## 2 Méthodes géométriques

(a) *Paramétrisation rationnelle d'une courbe* : COMBES 1998. La paramétrisation rationnelle du cercle, et l'application à la résolution de $x^2 + y^2 = z^2$. Dans SAMUEL 1967, il n'y a pas de solution non triviale à $x^4 + y^4 = z^4$. Paramétrisation rationnelle du folium de Descartes et application aux solutions de $x^3 + y^3 = xyz$.

(b) *Structure de groupe sur une conique* : CALDERO et GERMONI 2013. Loi de groupe sur l'hyperbole d'équation $xy = 1$. Résolution de $x^2 - dy^2 = 1$, $d$ sans facteurs carrés. Application à la détermination de $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]^\times$.

## 3 Méthodes algébriques

(a) *Anneau des entiers d'un corps quadratique* : SAMUEL 1967 et DUVERNEY 2007. Définition d'un corps quadratique, il est de la forme $Q(\sqrt{d})$ pour $d \in \mathbb{Z}$ sans facteurs carrés. Définition de la conjugaison et de la norme dans ce corps. Définition d'un élément entier de ce corps, l'ensemble des entiers $A_d$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ forme un anneau. Description de $A_d$ selon la valeur de $d$ modulo 4. Description du groupe des inversibles de $A_d$. $A_d$ est euclidien muni de $N : x + y\sqrt{d} \mapsto x^2 - dy^2$ si $d = -1, -2, -3, -7, -11$.

(b) *Application aux équations diophantiennes* : dans PERRIN 1996, le théorème des deux carrés. Dans DUVERNEY 2007, l'équation de Mordell ; l'étude de $\mathbb{Z}[j]$, $x^3 + y^3 = z^3$ n'a pas de solution entière non nulle. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, si $p$ est tel que $2p + 1$ est premier et $p$ premier impair, alors $\begin{cases} x^p + y^p + z^p = 0 \\ xyz \not\equiv 0[p] \end{cases}$ n'a pas de solution non triviale.

(c) *Formes quadratiques binaires* : DUVERNEY 2007. Définition d'une forme quadratique binaire, discriminant. Équivalence propre. Forme réduite. Existence d'une unique forme réduite de discriminant $D$, corollaire : il existe un nombre fini de formes quadratiques binaires de discriminant donné. Condition pour qu'un entier soit représenté par une forme quadratique donné (ce qui n'est autre qu'une équation diophantienne !)

(d) *Réduction modulo p* : dans DUVERNEY 2007, la définition du symbole de Legendre, la loi de réciprocité quadratique. Application (dans les exercices) à la résolution de $x^2+7x-2=0$ dans $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$. Remarquer (sans référence) de manière générale que la loi de réciprocité quadratique permet de dire quand il n'existe pas de solution à $x^2 + py = a$.

# 141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.

**Développements** :
- Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$
- Irréductibilité des polynômes cyclotomiques
- *Invariants de similitude*

**Références** : PERRIN 1996, GOZARD 1997, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, DEMAZURE 2008, TAUVEL 2008.

**Plan** :
**Cadre :** $A$ anneau intègre, $K$ corps

## 1 Critères d'irréductibilité

(a) *Définition et premières propriétés* : dans PERRIN 1996, la définition d'un polynôme irréductible. Dans GOZARD 1997, tout polynôme de degré 1 est irréductible dans $K[X]$, si $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible de degré $>1$, alors $P$ n'a pas de racines dans $K$ ; contre-exemple : $(X^2+1)^2 \in \mathbb{Q}[X]$ qui n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$ mais est réductible sur $\mathbb{Q}$ ; si $P \in K[X]$ est de degré 2 ou 3, $P$ est irréductible ssi $P$ n'a pas de racines dans $K$ ; $X^2+1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$. Dans PERRIN 1996, définition du contenu d'un polynôme dans $A$ factoriel, $c(PQ) = c(P)c(Q)$ à inversible près ; théorème de Gauss donnant les irréductibles de $A[X]$ ; si $A$ est factoriel, $A[X]$ est factoriel. Sans référence : $2X+1 \in \mathbb{Z}[X]$ est irréductible. Contre-exemple (PERRIN 1996) : $2X$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ mais pas dans $\mathbb{Z}[X]$.

(b) *Critères usuels* : PERRIN 1996. Le critère d'irréductibilité par réduction (en toute généralité), exemple : $X^3+462X^2+243X-67691$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$, contre-exemple : $X^5-7$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ mais pas sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Critère d'Eisenstein, application : $1+X+\cdots+X^{p-1}$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$ ; si $a = p_1^{\alpha_1}\dots p_r^{\alpha_r}$ où un des $\alpha_i$ vaut 1, alors $X^n-a$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

(c) *Éléments algébriques et polynôme minimal* : dans PERRIN 1996, définition d'un élément transcendant/algébrique et polynôme minimal. $e$ et $\pi$ sont transcendants (admis). $\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{2}$ sont algébriques, donner leurs polynômes minimaux respectifs. Dans une extension $L/K$, $\alpha \in L$ est algébrique ssi $K(\alpha) = K[\alpha]$, et $K[\alpha]/K$ est de degré $\deg \Pi_\alpha$. Dire que le polynôme minimal d'un élément algébrique est irréductible. S'il y a la place, parler d'extensions algébriques et de fermeture algébrique.

## 2 Adjonction de racines (idem 125)

(a) *Corps de rupture* : GOZARD 1997. Définition. Si $f \in K[X]$ est algébrique de degré 1, $K$ est un corps de rupture de $f$. Existence et unicité à unique isomorphisme près du corps de rupture d'un polynôme irréductible. Tout corps de rupture de $f$ est de degré $\deg f$. $\mathbb{C}$ est le corps de rupture de $X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$. $\mathbb{F}_4$ est le corps de rupture de $X^2+X+1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

(b) *Corps de décomposition* : GOZARD 1997. Définition, $\mathbb{C}$ est un corps de décomposition sur $\mathbb{R}$ de $X^2+1$. Dans PERRIN 1996, si $P = X^3-2$, $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ n'est pas un corps de décomposition de $P$ mais $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, j)$ en est un. Existence et unicité à isomorphisme près du corps de décomposition, majoration de son degré. Un polynôme

$P \in K[X]$ de degré $n$ est irréductible ssi il n'a pas de racines dans les extensions $L$ de $K$ de degré inférieur à $\frac{n}{2}$. Corollaire : si $P \in K[X]$ est irréductible de degré $n$, alors si $d$ et $n$ sont premiers entre eux et $L$ est une extension de degré $d$ de $K$, $P$ est irréductible dans $L[X]$ Dans PERRIN 1996, exemple de $X^4 + X + 1$ sur $\mathbb{F}_2$. Dans PERRIN 1996, Définition des polynômes cyclotomiques sur un corps quelconque $k$, formule $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_{d,k}(X)$, $\phi_{d,k}$ est de degré $\varphi(d)$. Irréductibilité de $\varphi_n$. Dans DEMAZURE 2008, décomposition de $\phi_n$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_q[X]$.

(c) *Clôture algébrique* : GOZARD 1997. Série d'équivalences définissant un corps algébriquement clos, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos mais pas $\mathbb{Q}$. Application : irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$. Définition de la clôture algébrique d'un corps, tout corps admet une unique clôture algébrique (admis). Exemple : si $p$ est premier, $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{F}_{p^n}$. La clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ n'est pas $\mathbb{C}$ ! Un corps algébriquement clos est infini.

**3 Polynômes irréductibles sur les corps finis** (idem 123 en bref)

(a) *Dénombrement des polynômes irréductibles* : GOZARD 1997. Dans PERRIN 1996, l'existence et l'unicité du corps fini à $q = p^n$ élément, c'est le corps de décomposition de $X^q - X$ sur $\mathbb{F}_p$. Si $p$ est premier, $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p[X]/(P)$ si $P$ est irréductible de degré $n$. Il existe donc des polynômes irréductibles de tout degré dans $\mathbb{F}_p[X]$. Dans TAUVEL 2008, l'étude des polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. Dans GOZARD 1997, exemples de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$.

(b) *Factorisation de polynômes* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Algorithme de Berlekamp et méthode pour "enlever" les facteurs carrés d'un polynôme dans un corps fini.

**4 Polynômes cyclotomiques** :

(a) *Définition et étude dans $\mathbb{Z}$* PERRIN 1996. Définition des polynômes cyclotomiques sur un corps quelconque $k$, ses coefficients sont dans le corps premier. Formule $X^n - 1 = \prod_{d|n} \phi_{d,k}(X)$, $\phi_{d,k}$ est de degré $\varphi(d)$. Donner la liste des premiers polynômes cyclotomiques. Si $\sigma : \mathbb{Z} \to k$ est le morphisme canonique, $\phi_{n,k}(X) = \sigma(\phi_{n,\mathbb{Q}}(X))$. Irréductibilité de $\varphi_n$, application au calcul de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ quand $\zeta$ est une racine primitive $n$-ième de l'unité.

(b) *Étude sur les corps finis* : DEMAZURE 2008. Décomposition en facteurs irréductibles de $\phi_n$ dans $\mathbb{F}_q$. Exemple de $\phi_7$ qui est irréductible sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{F}_7$. $\phi_n$ est irréductible sur $\mathbb{F}_q$ ssi $q$ est un générateur de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

# 142 : Algèbre des polynômes à plusieurs indéterminées. Applications.

**Développements** :

- Chevalley-Warning et EGZ
- Borne de Bézout

**Références** : Ramis, Deschamps et Odoux 1990, Goblot 2001. Secondaires : Beck, Malick et Peyré 2005, Gourdon 2009a, Zavidovique 2013.

**Plan** :
**Cadre :** $A$ anneau commutatif unitaire, $K$ corps. Si $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on note $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$.

## 1 Polynômes à plusieurs indéterminées

(a) *L'algèbre* $A[X_1, \ldots, X_n]$ : Ramis, Deschamps et Odoux 1990. Définition, c'est une $A$-algèbre pour les lois qu'on précisera. Dans Goblot 2001, propriété universelle de $A[X_1, \ldots, X_n]$. Isomorphisme entre $A[X_1, \ldots, X_n]$ et $A[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$. Exemple (sans référence) du déterminant et du polynôme caractéristique.

(b) *Degré et polynômes homogènes* : Ramis, Deschamps et Odoux 1990. Définition du degré partiel en une variable, du degré total. Définition de l'homogénéité, si $P$ est $p$-homogène, $Q$ $q$-homogène, alors $PQ$ est $p+q$-homogène. Sans référence : une forme quadratique est un polynôme 2-homogène. L'ensemble $M_p$ des polynômes $p$-homogènes est un sous-module de $A[X_1, \ldots, X_n]$ et $A[X_1, \ldots, X_n] = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} M_p$. Si $A$ est intègre, $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$. Polynômes dérivés partiels, et caractérisation avec ceux-ci de l'homogénéité.

(c) *Propriétés arithmétiques* : Ramis, Deschamps et Odoux 1990. $K[X]$ est euclidien, mais si $n \geqslant 2$, $K[X_1, \ldots, X_n]$ n'est pas principal (donc pas euclidien). Si $A$ est intègre, $A[X_1, \ldots, X_n]$ l'est aussi et $A[X_1, \ldots, X_n]^\times = A^\times$. Si $A$ est factoriel, $A[X_1, \ldots, X_n]$ l'est aussi. On a donc la décomposition de tout élément en produit de facteurs irréductibles, le théorème de Gauss mais pas le théorème de Bézout, cf $(X) + (Y) \neq (1)$ dans $K[X, Y]$. Un élément $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ est divisible par $X_n - Q$, $Q \in K[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ ssi $P(X_1, \ldots, X_{n-1}, Q) = 0$. Corollaire : $P$ est divisible par $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (X_j - X_i)$ ssi $P$ est divisible par $X_j - X_i$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Application (Gourdon 2009a) au calcul du déterminant de Vandermonde.

## 2 Fonctions polynômes

(a) *Définition et prolongement des identités* : dans Ramis, Deschamps et Odoux 1990, la fonction polynôme associée à un polynôme, si $K$ est infini on peut faire l'identification entre les deux notions, mais sinon, l'exemple de $X+1$ et $X^3+X^2+X+1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$ (inventer un exemple) montre que ce n'est pas le cas. Dans Goblot 2001, le théorème de prolongement des identités, applications à $\chi_{MN} = \chi_{NM}$ dans un corps infini quelconque (Beck, Malick et Peyré 2005).

(b) *Sur des corps finis* : dans Zavidovique 2013, Chevalley-Warning et EGZ.

(c) *Sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ : dans Goblot 2001, si deux fonctions polynômiales coïncident sur un ouvert dense de $K^n$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors les polynômes associés sont égaux. Application (Beck, Malick et Peyré 2005) : théorème de Cayley-Hamilton

## 3 Polynômes symétriques

(a) *Définition et relations coefficients-racines* : RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1990. Définition de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $A[X_1,\ldots,X_n]$ qui respecte la structure d'algèbre. Si $P$ est $p$-homogène et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\sigma(P)$ est $p$-homogène. Pour $G$ sous groupe de $\mathfrak{S}_n$, définition de la sous-algèbre $\mathscr{P}_G$ des éléments invariants par $G$, cas particulier de $G = \mathfrak{S}_n$ (polynômes symétriques) et $G = \mathfrak{A}_n$ (polynômes antisymétriques). Définition des polynômes symétriques élémentaires $\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n$, ce sont des polynômes $p$-homogènes. Dans GOBLOT 2001, les relations coefficients racines.

(b) *Structure des polynômes symétriques* : RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1990. Définition du poids d'un monôme, poids de $P(\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n)$ en fonction du poids de $P$. Définition de l'ordre d'un polynôme, ordre de $P(\Sigma_1,\ldots,\Sigma_n)$ en fonction de l'ordre de $P$. Théorème de structure des polynômes symétriques, algorithme permettant d'écrire un polynôme comme un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires, exemple.

## 4 Résultant et courbes algébriques

(a) *Premiers résultats* : dans MÉRINDOL 2006, définition du résultant comme déterminant de l'application de Sylvester, écrire ce déterminant explicitement. Dans un anneau factoriel, $\mathrm{Res}(P,Q) = 0$ ssi $P$ et $Q$ ont un facteur commun non nul, cas particulier des corps algébriquement clos. Expression du résultant en fonction des racines. Définition du discriminant, expression pour un polynôme de degré 2, voire de degré 3 sans terme de degré 2. Expression explicite du discriminant, $P$ a une racine multiple ssi son discriminant est nul. Application (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005) : l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ à valeurs propres simples est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) *Applications géométriques* : SZPIRGLAS 2009. Définition d'une courbe algébrique $V(P)$comme le lieu d'annulation d'un polynôme $P$. Si $A,B \in \mathbb{C}[X,Y]$, les points d'intersection de $V(A)$ et $V(B)$ vérifient $\mathrm{Res}_X(A,B)(y) = \mathrm{Res}_Y(A,B)(x) = 0$. Dans MÉRINDOL 2006, méthode pour trouver une équation implicite d'une courbe paramétrée. Borne de Bézout. Exemple (sans référence) : intersection d'un cercle et d'une parabole.

(c) *Théorème des zéros* : dans GOBLOT 2001 (admis), les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$ sont les $m_\alpha = (X1-\alpha_1,\ldots,X_n-\alpha_n)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}^n$, $m : \alpha \mapsto m_\alpha$ est une bijection de $\mathbb{C}^n$ sur l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]$. Dans Liu (ou de tête), il y a une bijection entre les idéaux maximaux de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n]/I$ et $Z(I) = \{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{C}^n : P(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = 0 \forall P \in I\}$.

# 144 : Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.

**Développements** :

- Borne de Bézout
- Chevalley-Warning et EGZ
- *Irréductibilité des polynômes cyclotomiques*

**Références** : GOZARD 1997, RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1990, MÉRINDOL 2006, SZPIRGLAS 2009, PERRIN 1996. Secondaires : ZAVIDOVIQUE 2013, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009a, TAUVEL 2006, AMAR et MATHERON 2003.

**Plan** :
**Cadre :** $K$ corps, $A$ anneau commutatif.

## 1 Arithmétique et théorie des corps

(a) *Généralités sur les racines* : RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1990. Définition d'une racine de $P \in A[X]$, $a$ est une racine de $P$ ssi $X - a \mid P$. Un polynôme constant non nul n'a pas de racines. Définition d'une racine d'ordre $k$ ; en caractéristique 0, $a$ est racine d'ordre $k$ de $P$ ssi $P(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$. Contre-exemple de $(X-1)^p \in \mathbb{F}_p[X]$. Un polynôme de degré $n$ admet au plus $n$ racines distinctes. Morphisme identifiant, pour $K$ infini, un polynôme et la fonction polynomiale associée. Contre-exemple dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ de $X^3 - 3X + 2$ qui admet 4 racines. Définition d'un polynôme scindé, tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé. Définition (PERRIN 1996, adapté) d'un polynôme irréductible. Dans GOZARD 1997, un polynôme irréductible de $K[X]$ de degré $> 1$ n'a pas de racines dans $K$ ; exemple de $(X^2+1)^2 \in \mathbb{Q}[X]$ qui n'a pas de racines dans $\mathbb{Q}$ mais est réductible sur $\mathbb{Q}$ ; irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

(b) *Corps de rupture et de décomposition* : GOZARD 1997. Définition d'un corps de rupture de $f \in K[X]$, c'est une extension finie de $K$. Existence d'un unique, à unique isomorphisme près, d'un corps de rupture de $f$ irréductible. Exemples : $\mathbb{C}$ est un corps de rupture de $X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$, $\mathbb{F}_4$ est un corps de rupture de $X^2+X+1 \in \mathbb{F}_2[X]$. Un polynôme $P \in K[X]$ de degré $n$ est irréductible ssi il n'a pas de racines dans les extensions $L$ de $K$ de degré inférieur à $\frac{n}{2}$. Le groupe de Galois de $K(\alpha)/K$ est en bijection avec l'ensemble des racines du polynôme minimal de $\alpha$ dans $K(\alpha)$, exemple de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q})$. Définition du corps de décomposition, existence, unicité à isomorphisme près et borne sur son degré. Exemple : $\mathbb{C}$ est un corps de décomposition de $X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$ ; si $q = p^n$, $\mathbb{F}_q$ est le corps de décomposition de $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$. Dans PERRIN 1996, irréductibilité des polynômes cyclotomiques et étude de ces derniers sur les corps finis, application au calcul de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ quand $\zeta$ est une racine primitive $n$-ième de l'unité.

(c) *Clôture algébrique* : GOZARD 1997. Série d'équivalences définissant un corps algébriquement clos, $\mathbb{C}$ est algébriquement clos mais pas $\mathbb{Q}$. Définition de la clôture algébrique d'un corps, tout corps admet une unique clôture algébrique (admis). Exemple : si $p$ est premier, $\overline{\mathbb{F}_p} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{F}_{p^n}$. La clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ n'est pas $\mathbb{C}$ ! Un corps algébriquement clos est infini.

## 2 Localisation et dénombrement des racines

(a) *Localisation* : dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, le théorème de Lucas. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009a, le lemme d'Hadamard et application aux disques de Gershgörin : on peut ainsi localiser les racines de $P$ en étudiant les valeurs propres de la matrice compagnon $C_P$.

(b) *Dénombrement* : dans ZAVIDOVIQUE 2013, Chevalley-Warning et EGZ. Dans TAUVEL 2006, le théorème de Rouché et application : si $P \in \mathbb{C}[X]$ est tel que $|P(z)| < 1$ pour $|z| = 1$, alors $P - X^n$ a exactement $n$ racines comptées avec multiplicité dans le disque unité ouvert. Il y a d'autres exemples dans AMAR et MATHERON 2003.

**3 Polynômes symétriques** (idem 142)

(a) *Définition et relations coefficients-racines* : RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1990. Définition de l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $A[X_1, \ldots, X_n]$ qui respecte la structure d'algèbre. Si $P$ est $p$-homogène et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors $\sigma(P)$ est $p$-homogène. Pour $G$ sous groupe de $\mathfrak{S}_n$, définition de la sous-algèbre $\mathscr{P}_G$ des éléments invariants par $G$, cas particulier de $G = \mathfrak{S}_n$ (polynômes symétriques) et $G = \mathfrak{A}_n$ (polynômes antisymétriques). Définition des polynômes symétriques élémentaires $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$, ce sont des polynômes $p$-homogènes. Dans GOBLOT 2001, les relations coefficients racines.

(b) *Structure des polynômes symétriques* : RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1990. Définition du poids d'un monôme, poids de $P(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ en fonction du poids de $P$. Définition de l'ordre d'un polynôme, ordre de $P(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$ en fonction de l'ordre de $P$. Théorème de structure des polynômes symétriques, algorithme permettant d'écrire un polynôme comme un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires, exemple.

**4 Résultant et racines**

(a) *Premiers résultats* : dans MÉRINDOL 2006, définition du résultant comme déterminant de l'application de Sylvester, écrire ce déterminant explicitement. Dans un anneau factoriel, $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ ssi $P$ et $Q$ ont un facteur commun non nul, cas particulier des corps algébriquement clos. Expression du résultant en fonction des racines. Définition du discriminant, expression pour un polynôme de degré 2, voire de degré 3 sans terme de degré 2. Expression explicite du discriminant, $P$ a une racine multiple ssi son discriminant est nul. Application (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005) : l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{C}$ à valeurs propres simples est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) *Applications géométriques* : SZPIRGLAS 2009. Définition d'une courbe algébrique $V(P)$comme le lieu d'annulation d'un polynôme $P$. Si $A, B \in \mathbb{C}[X, Y]$, les points d'intersection de $V(A)$ et $V(B)$ vérifient $\mathrm{Res}_X(A, B)(y) = \mathrm{Res}_Y(A, B)(x) = 0$. Dans MÉRINDOL 2006, méthode pour trouver une équation implicite d'une courbe paramétrée. Borne de Bézout. Exemple (sans référence) : intersection d'un cercle et d'une parabole.

# 150 : Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.

**Développements** :

- Étude de $O(p,q)$
- Invariants de similitude

Pour ne rien oublier, un tableau résumant toutes les actions de groupes étudiées dans la leçon se trouve dans CALDERO et GERMONI 2013, p. 62.

**Références** : CALDERO et GERMONI 2013, GOURDON 2009a, PERRIN 1996. Secondaires : CIARLET 1988

**Plan** :

**Cadre :** $K$ est un corps, $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$.

1. **Action par translation** : cf 162. CALDERO et GERMONI 2013. Définition d'une matrice échelonnée (réduite) en lignes/en colonnes, type d'une matrice échelonnée, exemple de matrice échelonnée. Action de $\mathrm{GL}_n(K)$ par translation à gauche/à droite. Classification des orbites de l'action. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, définition des matrices de transvection, dilatation, permutation. Dans CIARLET 1988, l'algorithme du pivot de Gauss, complexité en $O(n^3)$, il permet de mettre une matrice sous forme échelonnée réduite ; application à la résolution d'un système linéaire. Dans PERRIN 1996, $\mathrm{GL}_n(K)$ est engendré par les transvections et dilations, $SL_n(K)$ par les transvections.

2. **Action par équivalence**

   (a) *Orbites et rang* : CALDERO et GERMONI 2013. Définition de l'action, deux matrices sont dans la même orbite si ils représentent le même endomorphisme dans des bases différentes. Le rang est un invariant complet de l'action par équivalence. Dans GOURDON 2009a, les $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des représentants des orbites ; le rang de la transposée est égal au rang de la matrice. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, deux matrices équivalentes sur une extension de $K$ sont équivalentes sur $K$. Dans PERRIN 1996, le cardinal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$.

   (b) *Topologie des orbites* : dans CALDERO et GERMONI 2013, si $O_r$ est l'ensemble des matrices de rang $r$, $\overline{O_r} = \bigcup_{0 \leqslant k inf ouegr} O_k$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, $O_r$ est d'intérieur vide. Dans CALDERO et GERMONI 2013, semi-continuité inférieure du rang. Dans MNEIMNÉ et TESTARD 1986, $O_r$ est connexe.

   (c) *Généralisation à un anneau euclidien* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Théorème de Smith, remarque sur l'algorithme, inspiré du pivot de Gauss, application : citer les invariants de similitude.

3. **Action par conjugaison**

   (a) *Sur les matrices diagonalisables* : CALDERO et GERMONI 2013. notation pour l'ensemble des matrices diagonalisables et la classe de similitude d'une matrice. Une telle classe est déterminée par le spectre à permutation près. Le polynôme caractéristique est un invariant pour l'action de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\mathscr{D}_n(K)$. Contre-exemple de deux matrices ayant même polynôme minimal sans être semblables. Une matrice est diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée.

(b) *Sur les matrices nilpotentes : réduction de Jordan* : CALDERO et GERMONI 2013. On se donne $A$ nilpotente. Définition de la suite des noyaux itérées, inégalité résultant de l'injection de Frobenius. Définition d'une partition d'un entier et tableau de Young associé, partition duale. Théorème de Jordan, remarque (sans référence) sur le nombre de blocs de Jordan de taille $k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Exemple de réduction de Jordan. Deux endomorphismes nilpotents sont semblables ssi ils ont même réduite de Jordan : les réduites de Jordan forment donc un système de représentants des orbites. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, une matrice est nilpotente ssi 0 est dans l'adhérence de sa classe de similitude.

(c) *Invariants de similitude* : GOURDON 2009a ou CALDERO et GERMONI 2013. Définition du polynôme minimal de $u$ en $x$, il existe $x \in E$ tel que $\Pi_{u,x} = \Pi_u$. Théorème de réduction de Frobenius, suivi de sa version matricielle. Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude. Toute matrice est semblable à sa transposée. Invariants de similitude d'un nilpotent, on retrouve la réduction de Jordan.

(d) *Action de $O_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$* : GOURDON 2009a. Théorème de réduction des endomorphismes normaux, cas des endomorphismes antisymétriques/symétrique/orthogonaux. Application : $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple.

## 4 Action par congruence

(a) *Classification des orbites* : CALDERO et GERMONI 2013. Définition de l'action par congruence, interprétation en termes de formes quadrariques. Classification sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$, méthode de Gauss (GOURDON 2009a). Application à la classification des coniques non dégénérées (GRIFONE 2011). Classification sur $\mathbb{F}_q$, application à la loi de réciprocité quadratique.

(b) *Étude de quelques stabilisateurs* : CALDERO et GERMONI 2013. Définition de $O_n(\mathbb{R})$, il est engendré par les réflexions orthogonales. Étude de $O(p,q)$.

# 151 : Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

**Développements** :

- Théorème des extrémas liés
- Théorème d'Artin
- *Carathéodory*

**Références** : Grifone 2011, Gourdon 2009a, Mneimné et Testard 1986, Caldero et Germoni 2013, Jeanneret et Lines 2008, Beck, Malick et Peyré 2005. Secondaires : Perrin 1996, Francinou, Gianella et Nicolas 2007a

**Plan** :
**Cadre :** $K$ corps, $E$ $K$-espace vectoriel.

## 1 Théorie de la dimension : Grifone 2011

(a) *Familles génératrices, libres, bases* : définition d'une famille génératrice, exemple de $((1,1),(1,-1))$ qui engendre $K^2$. Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice. Définition d'une famille libre / liée ; exemple : $(x)$ est libre ssi $x \neq 0$. Toute sous-famille d'une famille libre est libre. Définition d'une base, c'est une famille sur laquelle tout élément de $E$ se décompose de manière unique. Si $E$ a une base de cardinal $n$, on a donc un isomorphisme de $K^n$ sur $E$. Exemple : $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) *Dimension d'un espace vectoriel* : définition d'un $K$-ev de dimension finie, $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie. Si $E$ est de dimension finie, $\mathscr{G}$ est une famille génératrice et $\mathscr{L}$ est une famille libre, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de $E$ telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$. Corollaire : théorème de la base extraite, tout $K$-ev de dilmension finie admet une base ; théorème de la base incomplète. Si $E$ admet une famille génératrice de cardinal $n$, toute famille de plus de $n$ éléments est liée. Donc toutes les bases ont le même cardinal, qui est la dimension de $E$. Exemples idiots : $\dim K^n = n$, $\dim K_n[X] = n+1$. Si $\dim E = n$, toute famille génératrice/libre à $n$ éléments est une base. Dimension d'un produit d'espaces vectoriels. Dans les exercices : dimension et base de $\mathscr{M}_n(K)$ ; dimension et base de l'espace des solutions de $y'' + ay + b = 0$.

(c) *Sous-espaces vectoriels et dimension* : on suppose $E$ de dimension finie dans la suite. Si $F$ est un sev de $E$, alors $F$ est de dimension finie, $\dim F \leqslant \dim E$ et $\dim F = \dim E \Leftrightarrow F = E$. Définition d'une somme directe de deux sev, d'un supplémentaire. Une base d'une somme directe est obtenue par concaténation. Tout sev de $E$ admet un supplémentaire et tous les supplémentaires ont la même dimension. $E = E_1 \oplus E_2 \Leftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $\dim E_1 + \dim E_2 = \dim E$. Si $(u, v)$ est libre, $K^2 = Ku \oplus Kv$. Si $P$ est un plan et $v \notin P$, $K^3 = P \oplus \mathbb{R}v$. Formule de Grassman. Somme directe générale.

(d) *Dimension et applications linéaires* : L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre, l'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est génératrice. Deux $K$-ev de dimension finie sont donc isomorphes ssi ils ont la même dimension.

## 2 Rang d'une application linéaire

(a) *Définition et intérêt* : GRIFONE 2011. Définition du rang d'un morphisme. Rang d'une famille de vecteurs, d'une matrice. Le rang d'un morphisme est celui de sa matrice dans des bases données. Théorème du rang. Application : si $f \in \mathscr{L}(E)$, $f$ est injective ssi $f$ est surjective ssi $f$ est bijective. Dans les exos, si $p$ est un projecteur, $E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$ ; isomorphisme permettant d'obtenir le théorème d'interpolation de Lagrange ; si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(G,E)$ est surjective, $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg}(f \circ g)$.

(b) *Calcul effectif du rang et caractérisation* : dans GOURDON 2009a, une matrice de rang $r$ est équivalente à une matrice $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Deux matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang. Dans GRIFONE 2011, par des opérations élémentaires d'échange et transvection, on peut obtenir à partir de $A$ la matrice $J_r$, algorithme de Gauss en $O(n^3)$ opérations pour $A \in \mathscr{M}_n(K)$. Dans GOURDON 2009a, le rang d'une matrice est la taille de la plus grande matrice carrée inversible extraite de $A$. Ajouter (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005) que le rang d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(K)$ est le même dans $L$ si $L/K$ est une extension finie ; le polynôme minimal est inchangé par extension de corps. Dans GRIFONE 2011, les opérations élémentaires de type échange et transvection n'affectent pas le rang, exemple de calcul de rang dans GOURDON 2009a. Le rang d'une matrice est le rang de sa transposée.

(c) *Topologie et rang* : dans MNEIMNÉ et TESTARD 1986, l'ensemble des projecteurs de rang $p$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est connexe ; l'ensemble des matrices de rang $p$ de $\mathscr{M}_n(K)$ est connexe. Dans CALDERO et GERMONI 2013, si $O_r$ est l'ensemble des matrices de rang $r$, $\overline{O_r} = \bigcup_{0 \leqslant k inf ouegr} O_k$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, $O_r$ est d'intérieur vide. Dans CALDERO et GERMONI 2013, semi-continuité inférieure du rang.

(d) *Formes linéaires et rang* : cf 159.

**3 Extensions de corps et dimension** : JEANNERET et LINES 2008. Définition d'une extension de corps, du degré, d'une extension finie, $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est de degré 2, $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est une extension infinie. Formule des degrés. Lemme d'indépendance de Dedekind et théorème d'Artin. Définition d'un élément algébrique, du polynôme minimal. Dans PERRIN 1996, $\sqrt{2}, i, \sqrt[3]{2}$ sont algébriques, donner leurs polynômes minimaux respectifs. Si $\alpha$ est algébrique sur $K$, $K[\alpha]/K$ est de degré $\deg \Pi_\alpha$. Remarquer que $(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ est une base de $K[\alpha]$ si $n = [K[\alpha] : K]$. Éventuellement, donner le degré d'une extension cyclotomique.

# 152 : Déterminant. Exemples et applications.

**Développements** :

- Ellipsoïde de John-Loewner
- Borne de Bézout

**Références** : Gourdon 2009a, Caldero et Germoni 2015, Grifone 2011, Francinou, Gianella et Nicolas 2009a . Secondaires : Ramis, Deschamps et Odoux 1990, Beck, Malick et Peyré 2005.

**Plan** :
**Cadre :** $K$ corps, $E$ $K$-espace vectoriel

## 1 Généralités

(a) *Déterminant d'une famille de vecteurs, formes n-linéaires* : Gourdon 2009a. Définition d'une forme $n$-linéaire, alternée, antisymétrique. Si $f$ est antisymétrique et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1,\dots,x_n)$. Si $K$ n'est pas de caractéristique 2, les deux notions coïncident. L'ensemble des formes $n$-linéaires alternées sur $E$ de dimension $n$ est un $K$-ev de dimension 1, cela permet de définir le déterminant dans une base $\det_{\mathscr{B}}$. Expression explicite avec les permutations. Changement de base. Une famille est liée ssi son déterminant dans une base est nul. Si $f$ est $n$-linéaire alternée, $u \in \mathscr{L}(E)$, et $f_u : (x_1,\dots,x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} f(x_1,\dots,x_{i-1},u(x_i),x_{i+1},\dots,x_n)$, alors $f_u = \mathrm{Tr}(u) f$.

(b) *Déterminant d'un endomorphisme, d'une matrice* : Gourdon 2009a. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det_{\mathscr{B}}(f(\mathscr{B})$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie, définition du déterminant de $f$. On a ainsi un morphisme $\det : \mathrm{GL}(E) \to K^*$ et $\det f \neq 0$ ssi $f$ est inversible. Déterminant d'une matrice, $\det A = \det({}^tA)$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$. Lien entre déterminant d'un endomorphisme et déterminant de sa matrice.

(c) *Interprétation géométrique* : dans Grifone 2011, le volume d'un parallépipède dans $\mathbb{R}^n$. Dans Gourdon 2009a, l'inégalité de Hadamard avec le cas d'égalité ; éventuellement le déterminant de Gram $G$ et la relation $\mathrm{d}(x,V) = \dfrac{G(e_1,\dots,e_n,x)}{G(e_1,\dots,e_n)}$ si $V = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$.

## 2 Calcul pratique du déterminant

(a) *Par le pivot de Gauss* : dans Gourdon 2009a, le déterminant d'une matrice triangulaire, d'une matrice triangulaire "par blocs". Sans référence : le déterminant d'une matrice diagonalisable est le produit de ses valeurs propres. Dans Grifone 2011, le déterminant est inchangé si on ajoute à une ligne une combinaison linéaire des autres linéaires. Dans Ramis, Deschamps et Odoux 1990, on peut transformer toute matrice carrée $A$ en $\begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \det A \end{pmatrix}$ par des transvections, la méthode est en $O(n^3)$ opérations.

(b) *Mineurs et cofacteurs* : Gourdon 2009a. Définition des mineurs et cofacteurs, développement selon une ligne/colonne, exemple (dans Grifone 2011). Définition de la comatrice, formule de la comatrice, application à l'inverse d'une matrice de taille 2.

(c) *Exemples de calculs de déterminants* : dans GOURDON 2009a, le déterminant de Vandermonde, citer l'application à la FFT (PEYRÉ 2004) ; le déterminant circulant. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009a, la généralisation du déterminant de Vandermonde, et le calcul de $\det\left(\dfrac{1}{\alpha_i+\beta_j}\right)$. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, Frobenius-Zolotarev.

## 3 Utilisation du déterminant

(a) *Calcul du rang et grassmannienne* : CALDERO et GERMONI 2015. Si $A \in \mathscr{M}_{n,m}(K)$, définition d'un mineur $\Delta_{IJ}(A)$ pour $I \subset [\![1,n]\!]$, $J \subset [\![1,m]\!]$. Le rang de $A$ est le plus grand des ordres des matrices inversibles extraites de $A$ (GOURDON 2009a). Formule de Cauchy-Binet, et application au plongement de Plücker.

(b) *Résolution de systèmes linéaires* : dans GRIFONE 2011, les formules de Cramer et un exemple. Théorème de Rouché-Fontené.

(c) *Polynôme caractéristique* : GOURDON 2009a. Définition, ses racines sont les valeurs propres, expression en dimension 2. Calcul du polynôme caractéristique d'une matrice compagnon. Cayley-Hamilton.

(d) *Résultant* : MÉRINDOL 2006 et SZPIRGLAS 2009. cf 142 et 144

## 4 Occurrences en analyse

(a) *Régularité du déterminant* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Le déterminant est polynômial donc $\mathscr{C}^\infty$. $\mathrm{GL}_n(K)$ est un ouvert dense de $\mathscr{M}_n(K)$. Intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables.

(b) *Jacobien* : dans BRIANE et PAGÈS 2006, formule de changement de variables, application aux coordonnées polaires, au calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, ellipsoïde de John-Loewner.

# 153 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.

**Développements** :

- Invariants de similitude
- Décomposition de Dunford par la méthode de Newton

**Références** : GOURDON 2009a, MANSUY et MNEIMNÉ 2012, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, DE SEGUINS PAZZIS 2011. Secondaires : RISLER et BOYER 2006, ROUVIÈRE 2003, GOURDON 2009b.

**Plan**
**Cadre :** $K$ corps, $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$, $u \in \mathscr{L}(E)$.

## 1 L'algèbre $K[u]$

(a) *Définition et structure* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Définition du morphisme $P \mapsto P(u)$ d'image $K[u]$ qui est donc une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$, définition du polynôme minimal $\Pi_u$, isomorphisme $K[u] \simeq K[X]/(\Pi_u)$ et dimension de $K[u]$. Théorème chinois dans ce contexte, lemme des noyaux, remarquer que les propriétés de la $K$-algèbre $K[u]$ sont intrinsèquement liées à celles de $u$.

(b) *Stabilité* : dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, si $P \in K[X]$, $\ker P(u)$ et $\operatorname{Im} P(u)$ sont stables par $u$, donc le lemme des noyaux fournit une décomposition en sous-espaces stables. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, lemme des noyaux sur un sous-espace stable, et conséquence : $\Pi_{u_F} \mid \Pi_u$. Si $E = F_1 \oplus F_2$ est une décomposition en sous-espaces stables, $\Pi_u = \operatorname{ppcm}(\Pi_{u_1}, \Pi_{u_2})$.

(c) *Un élément spécial de $K[u]$ : le polynôme caractéristique* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Définition, Cayley-Hamilton, les racines de $\chi_u$ sont les valeurs propres.

(d) *Polynômes d'endomorphismes et $K[X]$-modules* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Structure de $K[X]$-module sur $(E,u)$, interprétation dans le langage des modules de la similitude, des sous-espaces stables, de la somme directe.

## 2 Endomorphismes diagonalisables (idem 155)

(a) *Critère de diagonalisabilité* : dans GOURDON 2009a, définition de la diagonalisabilité (existence d'une base de vecteurs propres), dans cette base, la matrice de $u$ est diagonalisable, dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 et GOURDON 2009a, la caractérisation avec le polynôme annulateur scindé à racines simples et tout ce qui tourne autour. Si $\chi_u$ est scindé à racines simples, $u$ est diagonalisable. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, diagonalisation d'un projecteur et d'une symétrie ; critère de diagonalisation sur les corps finis. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, diagonalisation d'une matrice définie par des blocs ; si $M^2 = M$ et $\operatorname{Tr}(M) = 0$ alors $M = 0$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, nombre de matrices diagonalisables dans $\mathbb{F}_q$. Contre-exemple (de tête) de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 dans les exos, $u$ est diagonalisable ssi $K[u] \simeq K^l$ pour un certain $l$.

(b) *Diagonalisation simultanée* : dans GOURDON 2009a, si deux endomorphismes commutent, ils stabilisent leurs espaces propres respectifs. Le théorème de diagonalisation simultanée. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, application : si $A, B$ sont diagonalisables, $M \mapsto AMB$ l'est aussi. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(K) \Leftrightarrow n = m$ ; tout sous-groupe abélien fini de $\mathrm{GL}_n(K)$ ($K$ algébriquement clos) est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.

(c) *Réduction des endomorphismes normaux* : dans GOURDON 2009a, définition d'un endomorphisme normal ; $F$ est stable par $u$ ssi $F^\perp$ est stable par $u^*$, conséquence quand $u$ est normal. Réduction des endomorphismes normaux, cas des endomorphismes orthogonaux/antisymétriques/symétriques. Dans DE SEGUINS PAZZIS 2011, $u$ est normal ssi $u^* \in \mathbb{R}[u]$ ; connexité de $SO_n(\mathbb{R})$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, $\exp : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

(d)

(e) *Endomorphismes semi-simples* : GOURDON 2009a. Définition, $u$ est semi-simple ssi son polynôme minimal est produit d'irréductibles 2 à 2 distincts ssi il est diagonalisable dans une extension de $K$. Interprétation avec les $K[X]$-modules.

## 3 Trigonalisation et réductions générales

(a) *Critères de trigonalisation* : GOURDON 2009a. Définition et dimension des sous-espaces caractéristiques. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 : $u$ est trigonalisable ssi $\chi_u$ est scindé et autres équivalences. ; remarque : dans un corps algébriquement clos, tout le monde est trigonalisable ; exemple d'une matrice trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. $\det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Tr}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Spectre de $P(u)$ quand $P \in K[X]$ et et $u$ trigonalisable. Le théorème de trigonalisation simultanée. Exemple (sans référence) de deux matrices simultanément trigonalisables mais qui ne commutent pas. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 : la somme de deux endomorphismes trigonalisables qui commutent est trigonalisable. Si $A$ et $B$ sont trigonalisables, alors $M \mapsto AMB$ aussi.

(b) *Décomposition de Dunford* : dans RISLER et BOYER 2006, le théorème de Dunford version semi-simple, remarquer que la démonstration est algorithmique, corollaire : décomposition de Dunford dans $\mathbb{C}$. Dans GOURDON 2009a, surjectivité de l'exponentielle ; $f$ est diagonalisable ssi $\exp(f)$ est diagonalisable. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, exemple de décomposition de Dunford. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, non -continuité de l'application qui à une matrice associe sa partie diagonalisable dans Dunford.

(c) *Réduction de Frobenius* : dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, définition d'un sous-espace cyclique, polynôme minimal d'un endomorphisme en $x$ et dimension du sous-espace cyclique associé. dans GOURDON 2009a, définition d'un endomorphisme cyclique, caractérisation avec $\chi_u = \Pi_u$. Réduction de Frobenius, puis version matricielle, les invariants de similitudes se calculent avec l'algorithme de Smith. Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude. On retrouve la réduction de Jordan.

## 4 Applications

(a) *Calculs de puissances et d'inverses* : simplement remarquer comme c'est plus facile de calculer la puissance d'une matrice diagonalisable/trigonalisable/forme de Jordan

(b) *Calculs d'exponentielles et équations différentielles* : calcul de l'exponentielle d'une matrice avec la décomposition de Dunford, application à la résolution d'une

équation différentielle linéaire d'ordre $p$ à coefficients constants (GOURDON 2009b).
Dans ROUVIÈRE 2003, théorème de Liapounov.

# 154 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes. Exemples et applications.

**Développements** :
- Invariants de similitude
- Endomorphismes semi-simples

**Questions** :
Je suis passé sur cette leçon. Voici les questions qui m'ont été posées :
- Donner les invariants de similitude d'un endomorphisme ...
- C'est quoi les invariants de Smith ?
- Donner la généralisation de Dunford avec les semi-simples.
- Quelle est la forme de Jordan d'une matrice compagnon ? Que dire d'un endomorphisme dont la forme de Jordan est telle que chaque valeur propre a un seul bloc de Jordan ?
- Montrer qu'un endomorphisme est cyclique ssi son commutant est $K[u]$ (Caldero et Germoni 2015, p. 84).
- Montrer qu'un endomorphisme est cyclique ssi il a un nombre fini de sous-espaces stables (un sens est pas trop dur, l'autre n'a pas été fait)
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme tel que $u^3 - \mathrm{id} = 0$. Que dire des sous-espaces stables de $u$ si $E$ est un $\mathbb{C}$-ev ? si $E$ est un $\mathbb{R}$-ev ?

**Références** : Gourdon 2009a, Mansuy et Mneimné 2012, Beck, Malick et Peyré 2005, Caldero et Germoni 2013, De Seguins Pazzis 2011. Secondaires : Francinou, Gianella et Nicolas 2008.

**Plan**
**Cadre :** $K$ corps, $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$, $f \in \mathscr{L}(E)$.

## 1 Généralités et exemples

(a) *Définition* : Mansuy et Mneimné 2012. Définition, exemples de l'image et du noyau. Si $F$ est stable par $f$ et $g$, alors il est stable par $f+g$ et $f \circ g$. Si $F$ est stable par $f$ et si $g \in \mathrm{GL}(E)$, alors $g(F)$ est stable par $g \circ f \circ g^{-1}$, exemple avec les rotations. Forme de la matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à une décomposition en sous-espaces stables. Notation $f_F$ pour l'endomorphisme induit. Le polynôme minimal/caractéristique de l'endomorphisme induit divise celui de $f$. Si $E = F \oplus G$ où $F, G$ sont stables par $f$, alors $\Pi_f = \mathrm{ppcm}(\Pi_{f_F}, \Pi_{f_G})$.

(b) *Exemples de sous-espaces stables* : Mansuy et Mneimné 2012. Donner les exemples des sous-espaces stables associés à une homothétie, un projecteur, une symétrie. Sous-espaces stables par $M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)I_n$. Les sous-espaces stables par un nilpotent maximal sont les noyaux itérés. Définition des sous-espaces cycliques, expression explicite, dimension.

(c) *Fabriquer des sev stables : le lemme des noyaux* : dans Beck, Malick et Peyré 2005, le lemme des noyaux. Dans Gourdon 2009a, application : il existe $x \in E$ tel que $\Pi_{f,x} = \Pi_f$ ; définition des sous-espaces caractéristiques, ils sont stables, dimension ; critère de diagonalisabilité avec le polynôme caractéristique et corollaire : si $\chi_f$ est scindé à racines simples, $f$ est diagonalisable. Idem avec la trigonalisation. Remarquer (Beck, Malick et Peyré 2005) que l'endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable/trigonalisable sur un sev stable est encore diagonalisable/trigonalisable. Dans GOURDON 2009a, décomposition de Dunford, application au calcul d'exponentielle, $f$ est diagonalisable ssi $\exp(f)$ l'est.

(d) *Supplémentaires stables et dualité* : dans GOURDON 2009a, $F$ est stable par $f$ ssi $F^{\perp}$ est stable par ${}^t f$, exemple : trouver un vecteur propre de ${}^t f$, c'est comme trouver un hyperplan stable par $f$.

## 2 Stabilité et commutation

(a) *Comportement vis à vis des sous-espaces stables* : MANSUY et MNEIMNÉ 2012. si deux endomorphismes commutent, ils stabilisent leurs images et noyaux respectifs. Les seuls endomorphismes qui commutent avec tout le monde sont les homothéties. Un endomorphisme commute avec le projecteur $p$ ssi il stabilise $\ker(p - \mathrm{id})$ et $\ker(p)$.

(b) *Réduction simultanée* : dans GOURDON 2009a, Le théorème de diagonalisation/trigonalisation simultanée. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, application : si $A, B$ sont diagonalisables, $M \mapsto AMB$ l'est aussi. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(K) \Leftrightarrow n = m$ ; tout sous-groupe abélien fini de $\mathrm{GL}_n(K)$ ($K$ algébriquement clos) est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.

(c) *Réduction des endomorphismes normaux* : dans GOURDON 2009a, définition d'un endomorphisme normal ; $F$ est stable par $u$ ssi $F^{\perp}$ est stable par $u^*$, conséquence quand $u$ est normal. Réduction des endomorphismes normaux, cas des endomorphismes orthogonaux/antisymétriques/symétriques. Dans DE SEGUINS PAZZIS 2011, $u$ est normal ssi $u^* \in \mathbb{R}[u]$ ; connexité de $SO_n(\mathbb{R})$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, $\exp : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

## 3 Stabilité et cyclicité

(a) *Théorème de Jordan* : CALDERO et GERMONI 2013.

(b) *Réduction de Frobenius* : GOURDON 2009a. Définition d'un endomorphisme cyclique, caractérisation avec $\chi_u = \Pi_u$. Réduction de Frobenius, puis version matricielle, les invariants de similitudes se calculent avec l'algorithme de Smith. Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude. On retrouve la réduction de Jordan. Les invariants de similitude se calculent avec l'algorithme de Smith.

## 4 A la recherche d'un supplémentaire stable

(a) *Stabilité et $K[X]$-modules* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Structure de $K[X]$-module sur $(E, f)$, interprétation des notions de sev stable, supplémentaire stable, similitude, dans ce contexte.

(b) *Semi-simplicité* : GOURDON 2009a. Définition, $u$ est semi-simple ssi son polynôme minimal est produit d'irréductibles 2 à 2 distincts ssi il est diagonalisable dans une extension de $K$. Interprétation avec les $K[X]$-modules.

**5 Applications en théorie des représentations** : COLMEZ 2011. Définition d'une représentation, exemple de la représentation de permutation, sous-représentation, représentation irréductible. Il existe un produit scalaire invariant sous l'action de $G$, théorème de Maschke et décomposition canonique en sous-représentations irréductibles. Si $G$ est abélien, les représentations irréductibles sont de dimension 1. Dans ULMER 2012, lien entre sous-groupes distingués et caractères irréductibles.

# 155 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.

**Développements** :
- Dunford par la méthode de Newton
- Endomorphismes semi-simples

**Références** : GOURDON 2009a, MANSUY et MNEIMNÉ 2012, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, DE SEGUINS PAZZIS 2011. Secondaires : RISLER et BOYER 2006, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, ROUVIÈRE 2003, GOURDON 2009b.

**Plan** :

## 1 Éléments propres et polynômes d'endomorphismes

(a) *Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres* : dans GOURDON 2009a, la définition d'une valeur propre, du sous-espace propre associé, d'un vecteur propre ; un espace propre est stable. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, exemples de vecteurs propres de l'opérateur de dérivation ; les sous-espaces propres sont en somme directe.

(b) *Polynômes d'endomorphisme et idéal annulateur* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Définition du morphisme "polynôme en $u$", du polynôme minimal, $\dim K[u] = \deg \Pi_u$, lemme des noyaux. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, les valeurs propres sont racines de tout polynôme annulateur.

(c) *Polynôme caractéristique* : GOURDON 2009a. Définition pour une matrice puis un endomorphisme ; les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres ; si $F$ est stable par $u$, $\chi_{u_F} \mid \chi_u$ ; lien entre dimension de l'espace propre et multiplicité de la racine associé dans le polynôme caractéristique. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, théorème de Cayley-Hamilton, ajouter que les racines de $\Pi_u$ sont les valeurs propres. Définition des sous-espaces caractéristiques, leur dimension, ils forment une décomposition de $E$ en sous-espaces supplémentaires stables.

## 2 Diagonalisabilité

(a) *Critères de diagonalisabilité* : dans GOURDON 2009a, définition de la diagonalisabilité (existence d'une base de vecteurs propres), dans cette base, la matrice de $u$ est diagonalisable, dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 et GOURDON 2009a, la caractérisation avec le polynôme annulateur scindé à racines simples et tout ce qui tourne autour. Si $\chi_u$ est scindé à racines simples, $u$ est diagonalisable. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, diagonalisation d'un projecteur et d'une symétrie ; critère de diagonalisation sur les corps finis. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, diagonalisation d'une matrice définie par des blocs ; si $M^2 = M$ et $\mathrm{Tr}(M) = 0$ alors $M = 0$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, nombre de matrices diagonalisables dans $\mathbb{F}_q$. Contre-exemple (de tête) de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

(b) *Conséquences topologiques* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Notations pour l'ensemble des matrices diagonalisables/diagonalisables à vp simples/trigonalisables, résultats topologiques sur ces ensembles, application au théorème de Cayley-Hamilton à $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, une matrice est diagonalisable ssi sa classe de similitude est fermée.

(c) *Endomorphismes semi-simples* : GOURDON 2009a. Définition, $u$ est semi-simple ssi son polynôme minimal est produit d'irréductibles 2 à 2 distincts ssi il est diagonalisable dans une extension de $K$. Interprétation avec les $K[X]$-modules.

## 3 Diagonalisation et commutation

(a) *Diagonalisation simultanée* : dans GOURDON 2009a, si deux endomorphismes commutent, ils stabilisent leurs espaces propres respectifs. Le théorème de diagonalisation simultanée. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, application : si $A, B$ sont diagonalisables, $M \mapsto AMB$ l'est aussi. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, $\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{GL}_m(K) \Leftrightarrow n = m$ ; tout sous-groupe abélien fini de $\mathrm{GL}_n(K)$ ($K$ algébriquement clos) est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices diagonales.

(b) *Cas des endomorphismes normaux* : idem 153,154. Dans GOURDON 2009a, définition d'un endomorphisme normal ; $F$ est stable par $u$ ssi $F^\perp$ est stable par $u^*$, conséquence quand $u$ est normal. Réduction des endomorphismes normaux, cas des endomorphismes orthogonaux/antisymétriques/symétriques. Dans DE SEGUINS PAZZIS 2011, $u$ est normal ssi $u^* \in \mathbb{R}[u]$ ; connexité de $SO_n(\mathbb{R})$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, $\exp : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto SO_n(\mathbb{R})$ est surjective. Dans CALDERO et GERMONI 2013, décomposition polaire.

## 4 Décomposition de Dunford

(a) *Décomposition* : dans RISLER et BOYER 2006, le théorème de Dunford version semi-simple, remarquer que la démonstration est algorithmique, corollaire : décomposition de Dunford dans $\mathbb{C}$. Dans GOURDON 2009a, surjectivité de l'exponentielle ; $f$ est diagonalisable ssi $\exp(f)$ est diagonalisable. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, exemple de décomposition de Dunford. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, non -continuité de l'application qui à une matrice associe sa partie diagonalisable dans Dunford.

(b) *Applications* : dans GOURDON 2009b, calcul de puissance, d'exponentielle. Dans GOURDON 2009a, méthode pour la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre $p$ à coefficients constants et exemple. Dans ROUVIÈRE 2003, application au théorème de Liapounov.

# 156 : Exponentielle de matrices. Applications.

**Développements** :
- Surjectivité de l'exponentielle
- Étude de $O(p,q)$.

**Références** : GOURDON 2009a, GRIFONE 2011, CALDERO et GERMONI 2013, ROUVIÈRE 2003, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, ZAVIDOVIQUE 2013, GOURDON 2009b, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009c, DEMAILLY 2006.

**Plan** :
**Cadre :** $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$.

## 1 Généralités

(a) *Définition et premières propriétés* : dans GRIFONE 2011, la série $\sum \frac{A^k}{k}$ converge pour tout $A$, définition de l'exponentielle. Dans ZAVIDOVIQUE 2013, $\exp(A) \in K[A]$. Dans GOURDON 2009a, continuité de l'exponentielle. Exemples (GRIFONE 2011) : exponentielle de $\lambda I$, d'une matrice nilpotente. Dans CALDERO et GERMONI 2013, $\exp({}^tA) = {}^t\exp(A)$. Dans GOURDON 2009a, $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1}\exp(A)P$ ; $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ si $A$ et $B$ commutent, corollaire sur l'exponentielle de l'inverse. Dans CALDERO et GERMONI 2013, $\exp : (K[A],+) \to K[A] \cap \mathrm{GL}_n(K)$ est un morphisme de groupes. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, contre-exemple :$\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \neq \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}\exp\begin{pmatrix} 0 & \theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Injectivité de l'exponentielle restreinte à l'ensemble des matrices diagonalisables. Dans GOURDON 2009a, $\det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Tr}$.

(b) *Calcul de l'exponentielle* : GRIFONE 2011. Exponentielle d'une matrice diagonale par bloc. Décomposition de Dunford, cela facilite le calcul d'exponentielles. Exponentielle d'un bloc de Jordan. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, $A$ est diagonalisable ssi $\exp(A)$ l'est ; $\exp A = \mathrm{Id}$ ssi $A$ est diagonalisables de valeurs propres dans $2i\pi\mathbb{Z}$. Dans GOURDON 2009b, $e^{tA} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0 \Leftrightarrow \mathrm{sp}(M) \subset \mathbb{R}_-^*$.

## 2 Exponentielle et topologie

(a) *Continuité et différentiabilité* : dans ROUVIÈRE 2003, différentielle de l'exponentielle. Dans MNEIMNÉ et TESTARD 1986, exp réalise un difféomorphisme d'un voisinage de 0 dans un voisinage de Id, application : $\mathrm{GL}_n$ n'a pas de sous-groupe arbitrairement petit. Définition du logarithme, $\exp(\log(A)) = A$, l'exponentielle est un homéomorphisme de l'ensemble des nilpotents sur l'ensemble des unipotents d'inverse log. Dans CALDERO et GERMONI 2013, $\exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. Étude de $O(p,q)$.

(b) *Surjectivité* : Contre-exemple dans $\mathbb{R}$ dans CALDERO et GERMONI 2013. Dans ZAVIDOVIQUE 2013, surjectivité de l'exponentielle et image de $\exp : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

## 3 Applications en calcul différentiel

(a) *Équations différentielles à coefficients constants* : GOURDON 2009b. Solutions de $Y' = AY$, elle se calcule explicitement en mettant $A$ sous forme de Jordan. Résolution d'une équation linéaire d'ordre $p$ à coefficients constants. Application : résolution d'un système d'équations différentielles dans les exemples.

(b) *Stabilité asymptotique d'un système différentiel* : dans DEMAILLY 2006, définition de la stabilité, stabilité asymptotique. Dans ROUVIÈRE 2003, théorème de Liapounov, application à l'équation de Van der Pol (FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009c). Dans DEMAILLY 2006, les dessins illustrant les 4 cas possibles en dimension 2.

(c) *Groupes matriciels à un paramètres* : dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009a, les morphismes continues de $(\mathbb{R},+)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ sont les $t \mapsto e^{tA}$ pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Application aux morphismes continus de $(S^1,\times)$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

# 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents

**Développements** :

- Dunford par la méthode de Newton
- Méthodes itératives de résolution d'un système linéaire

**Remarque.** Étonnamment, il est dit explicitement dans le rapport du jury que "les endomorphismes cycliques ont toute leur place dans cette leçon" et qu'on peut présenter la réduction de Frobenius. Il y a deux manières d'insérer ces notions dans le plan : soit tout à la fin en tant qu'ouverture (généralisation de Jordan) ; soit comme je l'ai fait, en considérant que les cycliques sont une généralisation des nilpotents maximaux dans la mesure où ils vérifient la même propriété $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base.

**Références** : GOURDON 2009a, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, CIARLET 1988, CALDERO et GERMONI 2013.

**Plan** :

**Cadre :** $K$ corps, $E$ un $K$-espace vectoriel de dimension $n$, $u \in \mathscr{L}(E)$.

## 1 Endomorphismes trigonalisables

(a) *Définition et caractérisation* : GOURDON 2009a. Définition d'un endomorphisme/matrice trigonalisable. $u$ est trigonalisable ssi sa matrice l'est. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 : $u$ est trigonalisable ssi $\chi_u$ est scindé et autres équivalences. ; remarque : dans un corps algébriquement clos, tout le monde est trigonalisable ; exemple d'une matrice trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. $\det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Tr}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Spectre de $P(u)$ quand $P \in K[X]$ et et $u$ trigonalisable.

(b) *Trigonalisation simultanée* : dans GOURDON 2009a, si deux endomorphismes commutent, ils stabilisent leurs espaces propres respectifs. Le théorème de trigonalisation simultanée. Exemple (sans référence) de deux matrices simultanément trigonalisables mais qui ne commutent pas. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 : la somme de deux endomorphismes trigonalisables qui commutent est trigonalisable. Si $A$ et $B$ sont trigonalisables, alors $M \mapsto AMB$ aussi.

(c) *Conséquences topologiques* : ici, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, notations pour l'ensemble des matrices diagonalisables / diagonalisables à vp simples/ trigonalisables, résultats topologiques sur ces ensembles, application au théorème de Cayley-Hamilton à $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. $\mathscr{T}_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Dans CIARLET 1988, lien entre rayon spectral et norme subordonnée et méthodes itératives de résolution d'un système linéaire.

## 2 Endomorphismes nilpotents

(a) *Définition et caractérisations* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Définition d'un endomorphisme nilpotent, du cône nilpotent. Si $A$ est nilpotent, $\varphi_A : M \mapsto AM$ est nilpotente. Nilpotence de l'opérateur de dérivation. Indice de nilpotence. Remarquer que selon Cayley-Hamilton, l'indice de nilpotence est inférieur à $\dim E$. Si $p$ est l'indice de nilpotence, il existe $x$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est une famille libre. Caractérisation de la nilpotence avec le polynôme caractéristique, polynôme minimal. Sans référence : un endomorphisme diagonalisable et nilpotent est nul. La matrice $A$ est nilpotente ssi 0 est dans l'adhérence de la classe de conjugaison de $A$. Exemple d'une matrice non nilpotente mais dont le polynôme caractéristique n'a que 0 pour racine.

(b) *Nature du cône nilpotent* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. On le note $\mathscr{N}$, ce n'est pas un sev de $E$, mais il est homogène. Description en dimension 2, ce qui justifie son nom de cône. Si $u, v$ sont nilpotents et commutent, $u+v$ est nilpotent. Si $u$ est nilpotent, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $u \circ f = f \circ u$, alors $u \circ f$ est nilpotent. En caractéristique nulle, $\mathrm{Vect}(\mathscr{N}) = \ker \mathrm{Tr}$.

(c) *Réduction de Jordan d'un endomorphisme nilpotent* : CALDERO et GERMONI 2013. On se donne $A$ nilpotente. Définition de la suite des noyaux itérées, inégalité résultant de l'injection de Frobenius. Définition d'une partition d'un entier et tableau de Young associé, partition duale. Théorème de Jordan, remarque (sans référence) sur le nombre de blocs de Jordan de taille $k$ pour $k \in \mathbb{N}$. Exemple de réduction de Jordan. Deux endomorphismes nilpotents sont semblables ssi ils ont même réduite de Jordan.

(d) *Généralisation des nilpotents : endomorphismes cycliques* : CALDERO et GERMONI 2013 ou GOURDON 2009b. Définition d'un endomorphisme cyclique (il existe $x$ tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ soit une base de $E$), un nilpotent d'indice $n$ est cyclique. Un endomorphisme est cyclique si sa matrice est une matrice compagnon dans une bonne base.

## 3 Réduction des endomorphismes trigonalisables

(a) *Sous-espaces caractéristiques* : GOURDON 2009a. Définition, ils fournissent une décomposition de $E$ en sous-espaces stables, cela permet d'écrire la matrice par blocs.

(b) *Décomposition de Dunford* : dans RISLER et BOYER 2006, le théorème de Dunford version semi-simple, remarquer que la démonstration est algorithmique, corollaire : décomposition de Dunford dans $\mathbb{C}$. Dans GOURDON 2009a, surjectivité de l'exponentielle ; $f$ est diagonalisable ssi $\exp(f)$ est diagonalisable. Dans MANSUY et MNEIMNÉ 2012, exemple de décomposition de Dunford. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, non -continuité de l'application qui à une matrice associe sa partie diagonalisable dans Dunford.

(c) *Réduction de Jordan* : dans GOURDON 2009a, réduction de Jordan générale, application (dans GOURDON 2009b) à la résolution d'une équation différentielle d'ordre $p$, ou aux suites récurrentes d'ordre $n$. Exponentielle d'une matrice nilpotente, la réduction de Jordan facilite donc le calcul d'exponentielle.

(d) *Généralisation : réduction de Frobenius* : GOURDON 2009a ou CALDERO et GERMONI 2013. Définition du polynôme minimal de $u$ en $x$, il existe $x \in E$ tel que $\Pi_{u,x} = \Pi_u$. Théorème de réduction de Frobenius, suivi de sa version matricielle. Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude. On calcule les invariants de similitude avec l'algorithme de Smith. Toute matrice est semblable à sa transposée. Invariants de similitude d'un nilpotent, on retrouve la réduction de Jordan.

# 158 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

**Développements** :
- Lemme de Morse
- Méthode de gradient conjugué
- *Ellipsoïde de John-Loewner*

**Références** : GOURDON 2009a, DE SEGUINS PAZZIS 2011, GRIFONE 2011, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, CALDERO et GERMONI 2013. Secondaires : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 et QUARTERONI, SACCO et SALERI 2007.

**Plan** :
**Cadre :** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

## 1 Matrices symétriques, formes quadratiques et autoadjoints

(a) *Définition* : dans GOURDON 2009a, la définition d'une matrice symétrique/hermitienne, notation $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \mathscr{H}_n(\mathbb{C})$. Décomposition d'une matrice réelle en partie symétrique et partie antisymétrique et résultat analogue pour les matrices hermitiennes. Dans DE SEGUINS PAZZIS 2011, l'exemple de la hessienne.

(b) *Lien avec les formes quadratiques et hermitiennes* : GOURDON 2009a. Définition d'une forme hermitienne, exemple de $\langle f, g\rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t)\mathrm{d}t$. Représentation matricielle d'une forme bilinéaire, effet d'un changement de base, remarquer que classifier les formes hermitiennes/quadratiques, c'est comme classifier les matrices hermitiennes/symétriques à congruence près. Définition d'une forme (définie) positive.

(c) *Endomorphismes autoadjoints* : DE SEGUINS PAZZIS 2011. Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E)$ et $\mathrm{Bil}(E \times E, \mathbb{R})$, définition de l'adjoint, d'un endomorphisme autoadjoint. Matrice de l'adjoint dans une base orthonormée. L'application $u \mapsto u^*$ est une anti-involution de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$. Noyau et image de l'adjoint, remarquer qu'il y a donc une bijection entre les endomorphismes autoadjoints et les matrices symétriques/hermitiennes. Théorème spectral dans GOURDON 2009a.

## 2 Action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{H}_n$ par congruence

(a) *Classification des orbites, signature* : dans GRIFONE 2011, le théorème de Sylvester, définition de la signature. Dans GOURDON 2009a, la méthode de Gauss sur un exemple. Une forme quadratique est définie positive ssi elle est de signature $(n, 0)$. Dans DE SEGUINS PAZZIS 2011, les composantes connexes de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(b) *Étude des stabilisateurs et décomposition polaire* : CALDERO et GERMONI 2013. Définition du groupe orthogonal/unitaire, définition du groupe orthogonal d'une forme quadratique. Description de $O_2(\mathbb{R})$. Décomposition polaire, applications : $\|A\|_2 = \sqrt{\rho({}^tAA)}$, $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe compact maximal, $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. Etude de $O(p,q)$ et ses composantes connexes.

(c) *Réduction simultanée* : dans DE SEGUINS PAZZIS 2011, le théorème de réduction simultanée en version "formes quadratiques" puis matricielles, application à la recherche des points critiques d'une fraction rationnelle, remarquer qu'on retrouve le théorème spectral et la réduction des endomorphismes normaux. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, log-concavité du déterminant, ellipsoïde de John-Loewner et sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

## 3 Quelques applications

(a) *Problèmes d'extremum* : Dans GOURDON 2009b, les conditions du second ordre. Dans ROUVIÈRE 2003, dessin des situations possibles d'une surface par rapport à son plan tangent dans $\mathbb{R}^3$ ; contre-exemple d'un point critique qui n'est pas un point d'extremum ; lemme de Morse.

(b) *Classification des coniques et quadriques* : GRIFONE 2011 (à la fin). Définition d'une conique, théorème de classification. Définition d'une quadrique et dire qu'on peut mener la même étude.

(c) *Résolution de systèmes linéaires* : dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 et QUARTERONI, SACCO et SALERI 2007, les méthodes de gradient à pas optimal et conjugué.

# 159 : Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.

**Développements** :

- Invariants de similitude
- Théorème des extrémas liés

**Références** : GOURDON 2009a, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, BRÉZIS 2005, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, GOURDON 2009b ROUVIÈRE 2003, GRIFONE 2011.

**Plan** :
**Cadre :** $K$ est un corps, $E$ est un $K$-ev de dimension $n$.

## 1 Généralités

(a) *Formes linéaires* : GOURDON 2009a. Définition d'une forme linéaire, du dual. Sans référence : exemple d'une projection $(x_0, x_1) \mapsto x_0$ dans $K^2$, de la différentielle d'une application de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, théorème de Riesz si $E$ est euclidien, application à l'existence du gradient, théorème de Hahn-Banach analytique. Définition du bidual. $A \mapsto (f_A : M \mapsto \mathrm{Tr}(AM))$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_n(K)$ sur son dual, application : si $f \in \mathscr{M}_n(K)^*$ est telle que $\forall X, Y, f(XY) = f(YX)$, alors il existe $\lambda \in K$ tel que $f = \lambda \mathrm{Tr}$.

(b) *Hyperplans* : dans GOURDON 2009a, définition d'un hyperplan, ce sont les noyaux des formes linéaires non nulles. Sans référence : si $\ker\varphi = \ker\psi$ sont deux hyperplans égaux, alors $\varphi$ et $\psi$ sont proportionnelles. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, tout hyperplan de $\mathscr{M}_n(K)$ rencontre $\mathrm{GL}_n(K)$ ; si $u \in \mathscr{L}(E)$ stabilise tous les hyperplans, alors c'est une homothétie. Dans BRÉZIS 2005, définition d'un hyperplan affine, théorème de Hahn-Banach géométrique (séparations de deux convexes par un hyperplan). Citer le théorème du minimax de von Neumann en application.

## 2 Dualité

(a) *Bases duales* : GOURDON 2009a. Pour $(e_1, \dots, e_n)$ base de $E$, définition de la famille duale $(e_1^*, \dots, e_n^*)$. C'est une base de $E^*$, en particulier, $\dim E = \dim E^*$. Exemple de calcul de base duale (on en trouve aussi dans GRIFONE 2011). Méthode générale pour trouver la matrice de passage entre deux bases duales à partir de la matrice de passage entre les deux bases initiales. Application : interpolation de Lagrange. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la base duale de $((X-a)^k)_{k=0\dots n}$ est $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ où $\varphi_i : P \mapsto \dfrac{P^{(i)}(a)}{i!}$, ce qui donne la formule de Taylor pour les polynômes. Dans QUARTERONI, SACCO et SALERI 2007, la formule de Simpson exacte pour un polynôme de degré 3. Si $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in E^*$, $\varphi : x \in E \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_p(x))$ est surjective ssi $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ est libre.

(b) *Bidual et bases antéduales* : GOURDON 2009a. Isomorphisme entre $E$ et son bidual. Existence de la base antéduale, méthode pour calculer la matrice de passage entre deux bases antéduales.

## 3 Orthogonalité et application transposée

(a) *Orthogonalité au sens de la dualité* : GOURDON 2009a. Définition, $e_i$ et $e_j^*$ sont orthogonaux si $i \neq j$. Définition de l'orthogonal d'une partie de $E$, d'une partie de $E^*$, exemple $\{\varphi\}^o = \ker \varphi$. Petites propriétés : renversement des inclusions par passage à l'orthogonal, l'orthogonal d'une partie est l'orthogonal de l'espace engendré par celle-ci. Si $F$ est un sev de $E$, $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$. Application : $F = E \Leftrightarrow F^\perp = \{0\}$. Tout sev de $E$ de dimension $q$ s'écrit comme intersection de noyaux de $n-q$ formes linéaires indépendantes. L'ensemble des formes linéaires s'annulant sur un hyperplan est une droite de $E^*$. Remarquer que l'orthogonalité au sens de la dualité correspond à l'orthogonalité au sens du produit scalaire dans le cas euclidien via l'isomorphisme de Riesz.

(b) *Application transposée* : GOURDON 2009a. Définition, $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} {}^t u$, $\operatorname{Im} {}^t u = (\ker u)^\perp$. Si $M_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) = M$, $M_{\mathscr{B}^*,\mathscr{B}'^*}({}^t u) = {}^t M$. Relation ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$. Si $F$ est stable par $u$, $F^\perp$ est stable par ${}^t u$. Invariants de similitude, puis version matricielle. Deux endomorphismes sont semblables ssi ils ont mêmes invariants de similitude. Toute matrice est semblable à sa transposée. Remarquer (sans référence) que dans un espace euclidien, la transposée coïncide avec l'adjoint.

4 **Formes linéaires en analyse** : dans GOURDON 2009b, le théorème des extrémas liés. Dans ROUVIÈRE 2003, son interprétation géométrique et l'application (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005) au théorème spectral, à l'inégalité arithmético-géométrique, à l'inégalité de Hadamard.

# 160 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).

**Développements** :

- $SO_3(\mathbb{R})$ est simple
- Points extrémaux de la boule unité de $\mathscr{L}(E)$
- *Ellipsoïde de John-Loewner*

**Références** : Gourdon 2009a, De Seguins Pazzis 2011, Grifone 2011, Francinou, Gianella et Nicolas 2008, Caldero et Germoni 2013. Secondaires : Beck, Malick et Peyré 2005 et Quarteroni, Sacco et Saleri 2007.

**Plan** :
**Cadre :** $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace vectoriel euclidien de dimension $n$.

## 1 Adjoint d'un endomorphisme

(a) *Définition* : dans Grifone 2011, l'existence de l'adjoint, matrice de l'adjoint dans une base orthonormée. $f \mapsto f^*$ est une anti-involution linéaire de $\mathscr{L}(E)$. Un endomorphisme et son adjoint ont même rang, même déterminant. $\ker f^* = (\operatorname{Im} f)^\perp$ et $\operatorname{Im} f^* = (\ker f)^\perp$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie ${}^tAA = 0$, alors $A = 0$.

(b) *Adjoints remarquables* : dans Grifone 2011, définition d'un endomorphisme normal, autoadjoint, antisymétrique, orthogonal. L'ensemble des endomorphismes orthogonaux forme un groupe pour la composition. Lien entre les endomorphismes symétriques/antisymétriques et les matrices du même nom. Contre-exemple (sans référence) de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ somme de deux endomorphismes normaux non normale.

## 2 Endomorphismes normaux

(a) *Propriétés* : Gourdon 2009a. Si $u$ est normal, $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$. Si $F$ est stable par $u$, $F^\perp$ est stable par $u^*$. Application si $E_\lambda$ est un espace propre de $u$ normal, alors $E_\lambda^\perp$ est stable par $u$.

(b) *Réduction* : Gourdon 2009a. Réduction des endomorphismes normaux, cas particulier des antisymétrique, corollaire : une matrice antisymétrique n'est pas inversible si $\dim E$ est impair.

## 3 Endomorphismes orthogonaux

(a) *Propriétés* : Grifone 2011. Définition en tant qu'isométrie, lien avec $O_n(\mathbb{R})$, les valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal sont 1 ou -1 et son déterminant est $\pm 1$. Définition de $SO(E)$ et de $SO_n(\mathbb{R})$. $u$ est orthogonal ssi il envoie toute base orthonormée sur une base orthonormée, exemple d'une matrice orthogonale. La matrice de passage entre deux bases orthonormées est orthogonale. Réduction des endomorphismes orthogonaux. Application (Francinou, Gianella et Nicolas 2008) : $\exp : \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ est surjective. Dans Perrin 1996, le théorème de Cartan-Dieudonné.

(b) *Applications en dimension 2 et 3* : Grifone 2011. Description de $SO_2(\mathbb{R})$ et $O_2(\mathbb{R})$, idem en dimension 3. Remarque sur le calcul pratique de l'angle d'une rotation en dimension 3. Exemple d'application.

(c) *Propriétés algébriques et topologiques* : Dans MNEIMNÉ et TESTARD 1986, connexité par arcs de $SO_n(\mathbb{R})$ et composantes connexes de $O_n(\mathbb{R})$. Compacité de $O_n(\mathbb{R})$. $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements, c'est un groupe simple (CALDERO et GERMONI 2013).

## 4 Endomorphismes autoadjoints

(a) *Propriétés et réduction* : GOURDON 2009a. $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Théorème spectral. Définition d'un endomorphisme symétrique (défini) positif. Réduction simultanée, application à l'ellipsoïde de John-Loewner.

(b) *Décomposition polaire* : CALDERO et GERMONI 2013. Homéomorphisme de la décomposition polaire, application à l'expression du rayon spectral d'une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $\exp : \mathscr{S}n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme. Les sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont les conjugués de $O_n(\mathbb{R})$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, définition d'un point extrémal, les points extrémaux de la boule unité de $\mathscr{L}(E)$ pour $\|\cdot\|_2$ sont les éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

# 161 : Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Applications en dimension 2 et 3

**Développements** :

- $SO_3(\mathbb{R})$ est simple
- Points extrémaux de la boule unité de $\mathscr{L}(E)$

**Références** : MERCIER 2008, GOURDON 2009a, AUDIN 2006, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, CALDERO et GERMONI 2013.

**Plan** :

**Cadre :** $\mathscr{E}$ espace affine euclidien de dimension $n$, d'espace vectoriel associé $E$ (euclidien).

## 1 Généralités

(a) *Définition, exemples et propriétés* : MERCIER 2008. Définition, exemple des translations. Une isométrie est une application affine de partie linéaire une application orthogonales. Dans AUDIN 2006, exemple des symétries orthogonales et cas particulier des réflexions.

(b) *Propriétés et structure des isométries* : sans référence, une isométrie est bijective. Dans MERCIER 2008, l'ensemble $Is(\mathscr{E})$ des isométries constitue un sous-groupe du groupe affine ; l'application $f \mapsto \vec{f}$ (partie linéaire de $f$) est une bijection de $Is_O(\mathscr{E}) = \{f \in Is(\mathscr{E}) : f(O) = O\}$ sur $O(E)$ ; définition du sous-groupe des déplacements, de l'ensemble des antidéplacements ; théorème de classification des isométries, avec définition de l'espace invariant. Si l'espace invariant de $\vec{f}$ est trivial, alors $f$ admet un unique point invariant. Sans référence : une isométrie est déterminée par $n+1$ points.

## 2 Classification des isométries

(a) *Étude de $O(E)$* : le lien étroit explicité précédemment entre $Is(\mathscr{E})$ et $O(E)$ donne l'intérêt de cette étude, qui fournira la classification des isométries. Dans GOURDON 2009a, théorème de classification des endomorphismes orthogonaux. Dans CALDERO et GERMONI 2013, $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales, $SO(E)$ par les retournements, c'est-à-dire les symétries orthogonales par rapport à un plan de $E$. Dans MERCIER 2008, toute isométrie affine est le produit d'au plus $n+1$ réflexions ; tout déplacement est le produit d'au plus $n+1$ retournements. Dans AUDIN 2006, $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs et est une des deux composantes connexes par arcs de $O_n(\mathbb{R})$. Donc (sans référence) : $Is^+(\mathscr{E})$ est connexe par arcs. Dans CALDERO et GERMONI 2013, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple ; décomposition polaire et application à l'expression de $||A||_2$ quand $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ; les sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont les conjugués de $O_n(\mathbb{R})$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, définition d'un point extrémal, c'est un point qui ne peut s'écrire comme milieu de deux points distincts ; points extrémaux de la boule unité de $\mathscr{L}(E)$.

(b) *Classification en dimension* 2 *et* 3 : dans MERCIER 2008, description des déplacements en dimension 2, définition d'une réflexion glissée, tableau donnant la nature d'une isométrie en fonction de son ensemble des invariants. Même étude en dimension 3. Faire des dessins, c'est joli !

## 3 Isométries conservant des objets du plan ou de l'espace

(a) *Définition* : dans MERCIER 2008, définition de $Is(P)$ si $P \subset \mathscr{E}$, c'est un sous-groupe de $Is(\mathscr{E})$. Définition de $Is^+(P)$ et $Is^-(P)$ et bijection entre les deux.

(b) *Polygônes réguliers* : MERCIER 2008. Équivalence définissant un polygône régulier à $n$ sommets, noté $\mathscr{P}_n$. Description de $Is^+(\mathscr{P}_n)$ et $Is^-(\mathscr{P}_n)$. Définition du groupe diédral $D_n = Is(\mathscr{P}_n)$, donner ses générateurs et relations, exemple : $D_3 \simeq \mathfrak{S}_3$.

(c) *Cubes* : MERCIER 2008. Les faces, arêtes et sommets sont laissés invariants par une isométrie du cubes. Classification des déplacements du cube, avec un dessin. On peut faire la même chose avec le tétraèdre mais c'est plus dur.

# 162 : Systèmes d'équations linéaires ; opérations, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.

**Développements** :

- Théorème d'Artin
- Méthodes itératives de résolution d'un système linéaire
- *Méthode de gradient conjugué*

**Références** : GRIFONE 2011, CALDERO et GERMONI 2013, RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1995, ALLAIRE 2005, CIARLET 1988, QUARTERONI, SACCO et SALERI 2007

**Plan** :
**Cadre :** $K$ est un corps, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, on cherche à résoudre $AX = b$ où $b \in \mathcal{M}_{m,1}(K)$.

1 **Théorie générale des systèmes linéaires** Définition d'un système compatible, du rang d'un système linéaire.

(a) *Systèmes de Cramer* : GRIFONE 2011. Si $A$ est inversible, on parle de système de Cramer. Le système admet une unique solution, formules de Cramer. Remarquer que le calcul est de l'ordre de $(n+1)!$ opérations. Exemple d'application.

(b) *Cas général, théorème de Rouché-Fontené* : GRIFONE 2011. On se donne $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$, $r$ son rang et on suppose que $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r,1} & \dots & a_{r,r} \end{vmatrix} \neq 0$. Définition des déterminants caractéristiques, théorème de Rouché-Fontené, exemple d'application qui suit.

(c) *Le cas des systèmes homogènes* : $b = 0$. Les solutions forment un espace vectoriel de dimension $n - r$, où $r$ est le rang de $A$. Dans JEANNERET et LINES 2008, le lemme d'indépendance de Dedekind et le théorème d'Artin.

2 **Sur les opérations élémentaires**

(a) *Définitions* : dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, les différentes opérations élémentaires (transvections, dilation, permutation) et les matrices correspondantes. Inverse d'une matrice de dilatation/transvection. Les transvections engendrent $\mathrm{SL}_n(K)$, les transvections et dilatations engendrent $\mathrm{GL}_n(K)$. Application (MNEIMNÉ et TESTARD 1986) aux résultats de connexité sur $\mathrm{SL}_n$ et $\mathrm{GL}_n$.

(b) *L'algorithme du pivot de Gauss* : dans RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1995, toute matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$ à première colonne non nulle peut être transformée par multiplication à gauche par des transvections en une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \beta & \star \\ (0) & \tilde{A} \end{pmatrix}$ ; donc si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, il existe $M \in \mathrm{GL}_n(K)$ qui est un produit de matrices de transvections triangulaires supérieures et de matrices de permutations telle que $T = MA$ soit triangulaire supérieure. Dans CIARLET 1988, l'algorithme de Gauss et sa complexité, application pour résoudre un système.

(c) *En termes d'actions de groupes* : CALDERO et GERMONI 2013. Définition d'une matrice échelonnée, échelonnée réduite, exemple. Classification des orbites pour l'action par multiplication à gauche.

(d) *Sur un anneau euclidien* : dans Beck, Malick et Peyré 2005, le théorème de Smith, dire que la preuve est algorithmique, donner la méthode pour résoudre un système d'équations diophantiennes ainsi. Citer le théorème de la base adaptée (donner un exemple de calcul de base adaptée), la classification des groupes abéliens finis, le calcul des invariants de similitude.

3 **Résolution effective des systèmes linéaires** Dans Allaire 2005, la définition du conditionnement d'une matrice et la proposition qui montre que le conditionnement donne la dépendance de la solution de $Ax = b$ par rapport à une petite variation de $A$ ou $b$.

(a) *Méthodes directes* : dans Ciarlet 1988, la méthode $LU$, et la méthode $QR$.

(b) *Méthodes itératives* : dans Ciarlet 1988, les méthodes itératives de résolution d'un système linéaire.

(c) *Méthodes de gradient* : dans Quarteroni, Sacco et Saleri 2007, les méthodes de gradient à pas conjugué et à pas optimal.

# 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, isotropie. Applications.

**Développements** :

- Lemme de Morse
- Réciprocité quadratique
- *Étude de $O(p,q)$*

**Références** : DE SEGUINS PAZZIS 2011, GOURDON 2009a, GRIFONE 2011, DUVERNEY 2007.

**Plan**

**Cadre** : $E$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $K$ corps de caractéristique différente de 2.

## 1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

(a) *Définition* : GOURDON 2009a. Définition d'une forme bilinéaire symétrique, exemple de telles formes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Forme quadratique. Exemple du terme quadratique dans le polynôme caractéristique (DE SEGUINS PAZZIS 2011, p. 34). Expression de la forme polaire d'une forme quadratique, dire en remarque qu'il y un isomorphisme entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques.

(b) *Représentation matricielle* : GOURDON 2009a et DE SEGUINS PAZZIS 2011, p. 32 et suivante. Matrice d'une forme bilinéaire symétrique, expression $b(x,y) = {}^tXMY$. La matrice de $b$ est la matrice de $x \mapsto b(x,\cdot)$. Changement de base, lien avec les classes de congruences. Expression d'une forme quadratique comme polynôme homogène de degré 2. Noyau et rang d'une forme quadratique, dégénérescence. Théorème du rang. Exemple d'une forme quadratique dégénére.

(c) *Formes quadratiques positives* : GOURDON 2009a. Définition, Cauchy-Schwarz, Minkowski, on définit ainsi une norme. Exemple de $A \mapsto \mathrm{Tr}\,({}^tAA)$

## 2 Orthogonalité et isotropie

(a) *Orthogonalité* : DE SEGUINS PAZZIS 2011. Définition de l'orthogonal, orthogonal de $S_n(K)$ pour le produit scalaire issu de la trace, dimension de l'orthogonal dans le cas non dégénéré.

(b) *Bases orthogonales* : GOURDON 2009a. Définition d'une famille orthogonale, théorème d'existence d'une base orthogonale. Algorithme de Gauss, exemple d'application.

(c) *Isotropie* : DE SEGUINS PAZZIS 2011 (voir aussi PERRIN 1996). Définition du cône isotrope, ce n'est pas un sous-espace vectoriel, exemple du "vrai" cône justifiant la définition. Théorème de Witt, décomposition d'un espace quadratique en somme directe de plans hyperboliques et d'un sous-espace anisotrope. En remarque, classifier les formes quadratiques sur $K$ revient à classifier les formes anisotropes. Définition d'un SETIM, de l'incide. Exemple de $A \mapsto \mathrm{Tr}\,(A^2)$.

## 3 Classification et réduction

(a) *Classification sur $\mathbb{F}_q$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$* : CALDERO et GERMONI 2013, p. 80. Dire qu'on veut trouver les orbites de l'action par congruence/équivalence. Résultat sur $\mathbb{C}$, théorème de Sylvester. Applications aux composantes connexes de l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de $E$ (DE SEGUINS PAZZIS 2011). Classification sur les corps finis, application à la loi de réciprocité quadratique.

(b) *Classification des formes quadratiques binaires* : Duverney 2007. Définition d'une forme quadratique binaire, discriminant. Équivalence propre. Forme réduite. Existence d'une unique forme réduite de discriminant $D$, corollaire : il existe un nombre fini de formes quadratiques binaires de discriminant donné. Condition pour qu'un entier soit représenté par une forme quadratique donnée.

(c) *Réduction simultanée* : De Seguins Pazzis 2011 p. 181. théorème de réduction simultanée, du spectre d'un couple $(\varphi, q)$. Lien avec les valeurs de $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{q(x)}$ en ses points critiques et exemple. Mentionner le théorème spectral dans $\mathbb{R}$. Ellipsoide de John-Loewner.

**4 Groupe orthogonal** :

(a) *Définition* : Perrin 1996, chapitre 6. Définition, dire que c'est un stabilisateur pour l'action de congruence. Cas euclidien, groupe spécial orthogonal. Exemple de $O_2(\mathbb{R})$, réduction des endomorphismes orthogonaux (De Seguins Pazzis 2011) et composantes connexes du groupe orthogonal.

(b) *Décomposition polaire* : Caldero et Germoni 2013. Énoncé, $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal, expression de la norme $\|\cdot\|_2$ d'une matrice à l'aide du rayon spectral. L'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Étude de $O(p,q)$.

**5 Applications des formes quadratiques réelles**

(a) *En géométrie différentielle* : Rouvière 2003. Définition de la hessienne, développement de Taylor à l'ordre 2. Lemme de Morse. Lien entre positivité de la hessienne et minimum local.

(b) *Coniques et quadriques* : Grifone 2011 (à la fin). Définition d'une conique, théorème de classification. Définition d'une quadrique et dire qu'on peut mener la même étude.

# 171 : Formes quadratiques réelles. Exemples et applications. Coniques.

**Développements** :
- Lemme de Morse
- Étude de $O(p,q)$
- *Ellipsoïde de John-Loewner*

**Références** : DE SEGUINS PAZZIS 2011, GOURDON 2009a, GRIFONE 2011, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008

**Remarque.** C'est la même leçon que 170 essentiellement ! !

**Plan** :
**Cadre** : $E$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$.

## 1 Formes bilinéaires et formes quadratiques

(a) *Définition* : GOURDON 2009a. Définition d'une forme bilinéaire symétrique, exemple de telles formes sur $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Forme quadratique. Exemple du terme quadratique dans le polynôme caractéristique (DE SEGUINS PAZZIS 2011, p. 34). Expression de la forme polaire d'une forme quadratique, dire en remarque qu'il y un isomorphisme entre formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques.

(b) *Représentation matricielle* : GOURDON 2009a et DE SEGUINS PAZZIS 2011, p. 32 et suivante. Matrice d'une forme bilinéaire symétrique, expression $b(x,y) = {}^tXMY$. La matrice de $b$ est la matrice de $x \mapsto b(x,\cdot)$. Changement de base, lien avec les classes de congruences. Expression d'une forme quadratique comme polynôme homogène de degré 2. Noyau et rang d'une forme quadratique, dégénérescence. Théorème du rang. Exemple d'une forme quadratique dégénérée.

(c) *Formes quadratiques positives* : GOURDON 2009a. Définition, Cauchy-Schwarz, Minkowski, on définit ainsi une norme. Exemple de $A \mapsto \mathrm{Tr}({}^tAA)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

## 2 Orthogonalité et isotropie

(a) *Orthogonalité* : DE SEGUINS PAZZIS 2011. Définition de l'orthogonal, orthogonal de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire issu de la trace, dimension de l'orthogonal dans le cas non dégénéré.

(b) *Bases orthogonales* : GOURDON 2009a. Définition d'une famille orthogonale, théorème d'existence d'une base orthogonale. Algorithme de Gauss, exemple d'application.

(c) *Isotropie* : (si on a la place...) DE SEGUINS PAZZIS 2011 (voir aussi PERRIN 1996). Définition du cône isotrope, ce n'est pas un sous-espace vectoriel, exemple du "vrai" cône justifiant la définition. Théorème de Witt, décomposition d'un espace quadratique en somme directe de plans hyperboliques et d'un sous-espace anisotrope. En remarque, classifier les formes quadratiques sur $\mathbb{R}$ revient à classifier les formes anisotropes. Définition d'un SETIM, de l'indice. Exemple de $A \mapsto \mathrm{Tr}(A^2)$.

## 3 Classification et réduction

(a) *Théorème de Sylvester* : CALDERO et GERMONI 2013, p. 80. Dire qu'on veut trouver les orbites de l'action par congruence/équivalence. Théorème de Sylvester. Applications aux composantes connexes de l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées de $E$ (DE SEGUINS PAZZIS 2011).

(b) *Classification des formes quadratiques binaires* : dans le livre d'Henri Cohen, p. 239. Définition d'une forme quadratique binaire, discriminant. Équivalence propre. Forme réduite. Existence d'une unique forme réduite de discriminant $D$, corollaire : il existe un nombre fini de formes quadratiques binaires de discriminant donné.

(c) *Réduction simultanée* : DE SEGUINS PAZZIS 2011 p. 181. théorème de réduction simultanée, du spectre d'un couple $(\varphi, q)$. Lien avec les valeurs de $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{q(x)}$ en ses points critiques et exemple. Mentionner le théorème spectral dans $\mathbb{R}$. Ellipsoïde de John-Loewner.

**4 Groupe orthogonal** :

(a) *Définition* : PERRIN 1996, chapitre 6. Définition, dire que c'est un stabilisateur pour l'action de congruence. Cas euclidien, groupe spécial orthogonal. Exemple de $O_2(\mathbb{R})$, réduction des endomorphismes orthogonaux (DE SEGUINS PAZZIS 2011) et composantes connexes du groupe orthogonal.

(b) *Décomposition polaire* : CALDERO et GERMONI 2013. Énoncé, $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal, expression de la norme $\|\cdot\|_2$ d'une matrice à l'aide du rayon spectral. L'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Étude de $O(p,q)$.

**5 Applications des formes quadratiques réelles**

(a) *En géométrie différentielle* : ROUVIÈRE 2003. Définition de la hessienne, développement de Taylor à l'ordre 2. Lemme de Morse. Lien entre positivité de la hessienne et minimum local.

(b) *Coniques et quadriques* : GRIFONE 2011 (à la fin). Définition d'une conique, théorème de classification. Définition d'une quadrique et dire qu'on peut mener la même étude. Faire les dessins en annexe.

# 190 : Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.

- Polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$
- Réciprocité quadratique

**Références** : De Biasi 1998, Francinou, Gianella et Nicolas 2007a, Mérindol 2006, Caldero et Germoni 2013, Perrin 1996, Ulmer 2012, Combes 1998

**Plan**

1 **Dénombrement direct** Dans De Biasi 1998, la définition d'un ensemble fini de cardinal $n$, deux ensembles finis en bijection ont même cardinal.

(a) *Formule du crible et partitions* : De Biasi 1998. Formule du crible, cas particulier d'ensembles deux à deux disjoints. Inventer une application débile. Lemme des bergers, application au dénombrement des surjections de $[\![1, n+1]\!]$ sur $[\![1, n]\!]$.

(b) *Dénombrement d'espaces produits* : De Biasi 1998. Définition d'un produit d'ensembles, cardinal. Application : cardinal de l'ensemble $Y^X$ des fonctions de $X$ dans $Y$. Nombre de tirages de $p$ boules dans une urne à $n$ boules avec remise. Il y a 684 nombres de 3 chiffres contenant au moins un des chiffres 0,3,6,9. $[\![1, n]\!]$ a $2^n$ parties.

2 **Combinatoire**

(a) *Arrangements et permutation* : De Biasi 1998. Définition d'un arrangement de $E$ $p$ à $p$, il correspond à une application injective de $[\![1, p]\!]$ dans $E$. Nombre d'arrangements. Définition d'une permutation, groupe $\mathfrak{S}_n$. Dans Francinou, Gianella et Nicolas 2007a, nombre de dérangements.

(b) *Combinaisons* : De Biasi 1998. Définition d'une combinaison et du coefficient binômial $\binom{n}{p}$, expression explicite. Petites propriétés du binôme de Newton (leur somme vaut $2^n$, triangle de Pascal, etc...), certaines se trouvant dans Mérindol 2006. Développement $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$. Inverse de la matrice $M = (\binom{i}{j})_{i,j}$. Nombre de surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$. On retrouve le nombre de dérangements. Exemples : nombre de tiercés dans une course de 20 chevaux. Sans référence : principe des tiroirs. Application (Perrin 1996) : l'équation sur $\mathbb{F}_q$ $ax^2 + by^2 = 1$ admet une infinité de solutions, classification des formes quadratiques sur $\mathbb{F}_q$.

3 **Dénombrement, théorie des groupes et corps finis**

(a) *Utilisation de la théorie des groupes*. Dans Perrin 1996, cardinal d'un quotient $G/H$ et application aux nombres de carrés dans $\mathbb{F}_q$. Dans Ulmer 2012, la définition d'une orbite et d'un stabilisateur, relation orbite-stabilisateur, formule des classes. Dans Perrin 1996, théorème de Wedderburn. Dans Caldero et Germoni 2013, loi de réciprocité quadratique. Dans Ulmer 2012, la formule de Burnside, application (Combes 1998) aux colliers de perles.

(b) *Dénombrement sur les corps finis* : dans Perrin 1996, le cardinal du groupe (spécial) linéaire sur $\mathbb{F}_q$. Dans Francinou, Gianella et Nicolas 2007a, le nombre d'involutions linéaires de $\mathbb{F}_q^n$. Dans Perrin 1996, l'ensemble des matrices triangulaires avec des 1 sur la diagonale est un $p$-Sylow de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, tout groupe admet un $p$-Sylow. Dans CALDERO et GERMONI 2013, nombre de sev de dimension $n$ de $\mathbb{F}_q^m$, nombre de matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{F}_q)$.

**4 Fonctions multiplicatives**

(a) *Indicatrice d'Euler* : COMBES 1998 ou TAUVEL 2008. Définition, définition d'une fonction multiplicative, une telle fonction est déterminée par sa valeur en les $p^\alpha$, $p$ premier. L'indicatrice d'Euler est multiplicative, expression explicite. Dans PERRIN 1996, $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$, $\mathbb{F}_q^\times$ est cyclique.

(b) *Fonction de Möbius* : TAUVEL 2008. Définition, c'est une fonction multiplicative et $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ sauf si $n = 1$. Formule d'inversion de Möbius, exemple de l'indicatrice d'Euler. Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, probabilité que deux entiers de $[\![1, n]\!]$ soient premiers entre eux.

**5 Séries génératrices** : dans MÉRINDOL 2006, définition, application à la suite de Fibonacci. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007a, on retrouve le nombre de dérangements ; calcul du nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$ ; éventuellement, partition d'un entier en parts fixées.

# Chapitre 2

# Leçons d'analyse

## 201 : Espaces de fonctions, exemples et applications.

**Développements** :

- Théorème de Grothendieck
- Espace de Bergman

**Références :** principales : HIRSCH et LACOMBE 2009, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, AMAR et MATHERON 2003, BONY 2001, GOURDON 2009b, BRIANE et PAGÈS 2006. Secondaires : *Willem*, RUDIN *1970*, *Zavidovique*, *Bayer-Margaria*.

**Plan :**

### 1 Espaces de fonctions régulières

(a) *Espaces* $\mathscr{C}^k$ : HIRSCH et LACOMBE 2009, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013. Convergence uniforme, Stone-Weierstrass et dérivés + application dans GOURDON 2009b, équicontinuité et Ascoli, opérateurs à noyaux et compacité des espaces lipschitziens. Topologie des espaces $\mathscr{C}^k(X)$ quand $X$ est compact, norme associée (adapté de QUEFFÉLEC et ZUILY 2013)

(b) *Espaces de Schwartz* (résumé de 250) : BONY 2001. Définition, semi-normes et distance associé, exemple des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact, stabilité par dérivation et multiplication par les polynômes. Continuité de la transformée de Fourier et inversion de Fourier. Transformée de Fourier d'une gaussienne.

(c) *Espace des fonctions holomorphes* (résumé de 245) : AMAR et MATHERON 2003, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013. Définitions, théorème de Cauchy, holomorphe = analytique, théorème de Weierstrass, distance métrisant la CVU sur tout compact (QUEFFÉLEC et ZUILY 2013), théorème de Montel, application au théorème de Cartan simplifié. Espaces de Bergman.

**2 Applications linéaires continues** : GOURDON 2009b ou SAINT-RAYMOND 2008 Définition par les conditions équivalentes, notation, norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$, complétude, condition de continuité d'une forme linéaire. Théorème de Banach-Steinhaus et application aux séries de Fourier.

### 3 Espaces $L^p$ : BRIANE et PAGÈS 2006. On se place dans $(X,\mathscr{A},\mu)$ espace mesuré

(a) *Structure* : définition de $\mathscr{L}^p$ et des $L^p$. Inégalité de Hölder et Minkowski, $\|\cdot\|_p$ est bien une norme. Théorème de convergence dominée $L^p$, application à un calcul d'intégrale. Théorème de Riesz-Fischer (ne pas oublier le résultat sur la suite extraite convergeant $\mu$-pp). Contre exemple pour montrer que CV $\mu$-pp n'implique pas CV dans $L^p$. Théorème de dualité $L^p$ (dans le HIRSCH et LACOMBE 2009, admis). Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov dans Brézis (admis ou pas, c'est selon).

(b) *Parties denses* : on se place dans le cas de la mesure de Lebesgue. Densité des fonctions en escalier à support compact, continues à support compact, séparabilité de $L^p$. Définition et propriété principal de l'opérateur de translation, définition de la convolution $L^p$-$L^q$ et uniforme continuité. $L^1$ est une algèbre commutative sans unité. Suites régularisations, exemples (gaussienne), théorème de convergence des suites régularisantes. Densité de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.

(c) *Le Hilbert $L^2$* : RUDIN 1970, WILLEM 1995. c'est un Hilbert, théorème de représentation de Riesz dans ce cas, densité de $L^1 \cap L^2$ dans $L^2$ et application à Fourier-Plancherel (RUDIN 1970). Dans WILLEM 1995 : théorème d'échantillonnage de Shannon.

(d) *Relations d'inclusions entre les $L^p$* : Relations d'inclusions topologiques pour les mesures finies. Application : théorème de Grothendieck. Contre exemple dans $\mathbb{R}$.

# 202 : Exemples de parties denses et applications.

**Développements** :

- Théorème de Weierstrass
- Espace de Bergman

**Références :** GOURDON 2009b, POMMELLET 1997, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, ROUVIÈRE 2003, HIRSCH et LACOMBE 2009, QUEFFÉLEC 1998

**Plan :**
**Cadre :** $(E, d)$ espace métrique, $A \subset E$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans GOURDON 2009b, la définition d'une partie dense, la caractérisation séquentielle.

## 1 Parties denses en dimension finie

(a) *Dans* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ : GOURDON 2009b. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. Dans POMMELLET 1997, le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'identité. Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$, exemple : $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\frac{a}{b} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Application : valeurs d'adhérence de $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans POMMELLET 1997, $\left\{e^{2i\pi n\theta}, \theta \in \mathbb{R}\right\}$ est dense dans $S^1$, l'ensemble des $p$-adiques est dense dans $\mathbb{R}$. Une fonction continue vérifiant l'inégalité $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ est convexe.

(b) *Dans* $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ *ou* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ : dans GOURDON 2009b, la densité de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, application à $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Dans ROUVIÈRE 2003, la différentielle du déterminant. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, les résultats de densité sur les matrices diagonalisables, application à la non -continuité de l'application qui à une matrice associe sa partie diagonalisable dans Dunford. Application dans GOURDON 2009b : théorème de Cayley-Hamilton dans $\mathbb{C}$.

## 2 Parties denses dans les espaces de fonctions

(a) *Parties denses de* $\mathscr{C}([a, b]$ : HIRSCH et LACOMBE 2009. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, le théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein. Dans GOURDON 2009b, contre-exemple : une limite uniforme polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme ; application : si $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$. Définition d'une partie séparante, théorème de Stone-Weierstrass. L'ensemble des fonctions lipschitziennes est dense dans $\mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$, théorème de Stone-Weierstrass trigonométrique. On peut préciser l'énoncé en mentionnant le théorème de Féjer. L'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $\mathscr{C}([a, b])$. Dans GOURDON 2009b, théorème de Heine et corollaire : l'ensemble des fonctions affines par morceaux est dense dans $\mathscr{C}([a, b])$.

(b) *Prolongement de fonctions* : dans QUEFFÉLEC 1998, le théorème. Exemple : construction de l'intégrale de Riemann à partir de l'intégrale d'une fonction en escalier (HIRSCH et LACOMBE 2009).

(c) **Parties denses dans les $L^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$** : dans BRIANE et PAGÈS 2006, l'ensemble des fonctions en escalier à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions continues à support compact aussi, $L^p$ est séparable. Lemme de Riemann-Lebesgue : si $f \in Ł^1, \hat{f}(t) \xrightarrow[|t|\to+\infty]{} 0$. Dans WILLEM 1995, l'espace de Schwartz est dense dans $L^2$, théorème de Fourier-Plancherel, application à $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} \mathrm{d}x$

3 **Théorème de Baire** : GOURDON 2009b et RUDIN 1970. Le théorème, un evn à base dénombrable n'est pas complet. Banach-Steinhaus et séries de Fourier, densité des fonctions continues nulle part dérivable. Théorème de l'application ouverte/de l'isomorphisme de Banach, théorème de Grothendieck.

4 **Espaces de Hilbert** : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 et HIRSCH et LACOMBE 2009.

Le théorème du supplémentaire orthogonal et l'application à un critère de densité. Définition d'une base hilbertienne, caractérisation par Parseval-Bessel. Base hilbertienne de Fourier, application au calcul de $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$. Espaces de Bergman. Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts dans une base hilbertienne.

# 203 : Utilisation de la notion de compacité

**Développements** :

- Théorème de Helly
- Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts
- *Ellipsoïde de John-Loewner*

**Références** : QUEFFÉLEC 1998, GOURDON 2009b, HIRSCH et LACOMBE 2009, ROUVIÈRE 2003, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, BRÉZIS 2005. Secondaires : NOURDIN 2006

**Plan** :

On se place dans $(X,d)$ espace métrique et $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## 1 Généralités :

(a) *Définition* : Dans GOURDON 2009b, définition avec la propriété de Borel-Lebesgue, partie compacte, $\mathbb{R}$ n'est pas compact. Les compacts sont bornés.Une réunion finie / intersection de parties compactes est compacte. Si $(x_n)$ converge vers $l$, alors $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}\cup\{l\}$ est compact. Théorème des fermés emboités. Théorème de Dini et application au théorème de Mercer (QUEFFÉLEC 1998).

(b) *Théorème de Bolzano-Weierstrass et conséquences*. Dans GOURDON 2009b, énoncé du théorème et corollaires : $X$ est compact ssi toute partie infine a un point d'accumulation ; une partie compacte de $X$ est fermée bornée. Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés. Dans un compact une suite converge ssi elle a une unique valeur d'adhérence. Dans NOURDIN 2006, $(x_n)$ converge ssi $(e^{itx_n})$ converge pour tout $t$, et application : la limite en loi d'une suite de variables gaussiennes est gaussienne. Dans HIRSCH et LACOMBE 2009, $X$ est compact ssi il est précompact et complet. Procédé d'extraction diagonal, compact d'un produit dénombrables de métriques compact en précisant la distance. Exemple de l'ensemble triadique de Cantor. Banach-Alaoglu. Théorème de Helly et application aux fonctions de répartitions.

## 2 Fonctions continues sur un compact

(a) *Problèmes d'extremum* : GOURDON 2009b. L'image d'un compact par une application continue est compacte. Contre-exemple avec sin. Si $f : X\to Y$ est continue bijective et $X$ compact, alors $f$ est un homéomorphisme. Toute fonction continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes. Application : en dimension finie, les normes sont équivalentes et le florilège de corollaires qui suit. Théorème de Rolle. Ellipsoïde de John-Loewner et corollaire : tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est contenu dans un $O(q)$ (FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008). Si $F$ est un sev fermé de $\mathbb{R}^n$, la distance de $x$ à $F$ est atteinte. Application (introuvable) au théorème de d'Alembert-Gauss

(b) *Théorème de Heine*. Dans GOURDON 2009b, énoncé du théorème. Exemple évident : une fonction continue $2\pi$-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue (sans référence). Application : deuxième théorème de Dini (p. 228). Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein (QUEFFÉLEC et ZUILY 2013).

(c) *Théorèmes de point fixe* : Dans GOURDON 2009b p. 34, le théorème de point fixe si $d(f(x),f(y))<d(x,y)$. Dans ROUVIÈRE 2003, une généralisation si on n'a qu'une inégalité large avec une hypothèse de convexité. Contre-exemple des rotations pour montrer qu'on peut ne pas avoir de point fixe sans convexité.

(d) Théorème de Stone-Weierstrass : HIRSCH et LACOMBE 2009. On prend $X$ compact. Définition d'une partie séparante, théorème de Stone-Weierstrass réel. Application : si $\int_0^1 f(t)t^n \mathrm{d}t = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, alors $f = 0$ (GOURDON 2009b). Théorème de Stone-Weierstrass complexe. Applications : densité de l'ensemble des fonctions lipschitziennes, des polynômes, des polynômes trigonométriques.

**3 Compacité dans les evn de dimension infinie**

(a) *Compacts des espaces fonctionnels usuels* : théorème de Riesz (GOURDON 2009b). Dans HIRSCH et LACOMBE 2009, définition de partie équicontinue, théorème d'Ascoli, exemple des fonctions lipschitziennes. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, distance de la convergence uniforme sur tout compact de $\mathscr{H}(\Omega)$, théorème de Montel. Application au théorème de Cartan simplifié.

(b) *Opérateurs compacts* : HIRSCH et LACOMBE 2009. Définition, exemple des opérateurs de rang fini, opérateur à noyaux avec Ascoli. L'ensemble des opérateurs compacts est un sev fermé de $\mathscr{L}(E, F)$. Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts.

# 204 : Connexité. Exemples et applications.

**Développements** :
- Surjectivité de l'exponentielle
- $SO_3(\mathbb{R})$ est simple

**Références** : Queffélec 1998, Dolecki 2011, Gourdon 2009b, Mneimné et Testard 1986

**Plan** :

## 1 Espaces connexes

(a) *Connexité* : Queffélec 1998. Définition, $\mathbb{R}$ est connexe, $X$ est connexe ssi toute application $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est constante. Généralisation : toute application localement constante sur un connexe est constante. Définition d'une partie connexe, exemple de $[0,1]$, contre-exemple de $\mathbb{Q}$. Dans Dolecki 2011, définition de parties séparées, les connexes sont les ensembles qui ne peuvent s'écrire comme union de deux parties séparées non vides. Lemme du passage des douanes, les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalle. Si $\sim$ est une relation d'équivalence sur $X$ dont toutes les classes sont ouvertes, alors il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.

(b) *Stabilité de la notion* : Queffélec 1998. L'image d'un connexe par une application continue est connexe, théorème des valeurs intermédiaires. Une union de connexes d'intersection non vide est connexe, un produit de connexes est connexe, l'adhérence d'un connexe est connexe. Contre-exemple d'une intersection de connexe non connexe (à inventer).

(c) *Composantes connexes* : dans Queffélec 1998, définition d'une composante connexe. Rayman a 6 composantes connexes. Une hyperbole en a deux. Dans Dolecki 2011, si $X$ est une union disjointe d'ouverts connexes, alors ces ouverts sont ses composantes connexes ; idem en remplaçant "ouvert" par "fermé" si l'union est finie ; théorème de Sierpinski (admis). Dans Queffélec 1998, un homéomorphisme envoie une composante connexe sur une composante connexe. Théorème de Jordan (admis) avec dessin.

(d) *Connexité par arcs* : dans Queffélec 1998, définition ; convexe $\Rightarrow$ étoilé $\Rightarrow$ connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe. La sphère unité est connexe par arcs. Exemple d'un connexe non cpa (Colmez 2011). Les connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles. Si $D$ est dénombrable, $D \subset \mathbb{R}^2$, alors $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est connexe par arcs. Si $\Omega$ est un ouvert connexe par arcs d'un evn, alors $\Omega$ est connexe.

## 2 Prolongement par connexité :

(a) *Application à l'analyse réelle* : Gourdon 2009b. théorème de Hadamard-Lévy, unicité dans le théorème de Cauchy-Lipschitz, théorème de Darboux (Gourdon 2009b)

(b) *Analyse complexe* : dans Queffélec 1998, la définition de l'indice. Dans Rudin 1970, la formule de Cauchy, le principe des zéros isolés, l'unicité du prolongement analytique. Prolongement méromorphe de $\Gamma$, de $\zeta$.

(c) *Théorème du relèvement continu et applications* : dans Gonnord et Tosel 1998, théorème du relèvement continu et Borsuk-Ulam. A temps fixé, il existe deux points antipodaux sur la Terre qui ont même température et même pression. Théorème de Brouwer dans le disque unité de $\mathbb{C}$.

**3 Connexité dans les espaces de matrices** :

(a) *Groupes de matrices topologiques* : MNEIMNÉ et TESTARD 1986. Définition d'un groupe topologique, exemple de $\mathrm{GL}_n$, $\mathrm{SL}_n$ et plein d'autres. Si $G$ est un groupe topologique et $H$ un sou-groupe connexe tel que $G/H$ est connexe, alors $G$ est connexe. Propriétés de connexité des sous-groupes usuels de $\mathrm{GL}_n$. Dans CALDERO et GERMONI 2013, l'ensemble des projecteurs de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ a $n+1$ composantes connexes.

(b) *Utilisation de la connexité en algèbre linéaire* : dans ZAVIDOVIQUE 2013, surjectivité de l'exponentielle. Dans CALDERO et GERMONI 2013, $SO_3(\mathbb{R})$ est simple. Dans MNEIMNÉ et TESTARD 1986, théorème de Cartan Von-Neumann.

# 205 : Espaces complets. Exemples et applications.

**Développements :**

- Banach-Steinhaus et séries de Fourier
- Espace de Bergman
- *Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts*

**Références** : GOURDON 2009b, SAINT-RAYMOND 2008, QUEFFÉLEC 1998, ROUVIÈRE 2003, HIRSCH et LACOMBE 2009. Secondaires : RUDIN 1970, WILLEM 1995,

**Plan :**
**Cadre** : $(X,d)$ espace métrique.

## 1 Généralités

(a) *Suites de Cauchy* : SAINT-RAYMOND 2008. Définition, toute suite convergente est de Cauchy, une suite de Cauchy est bornée. Une suite de Cauchy converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence. L'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue est de Cauchy. Contre-exemple d'une suite de rationnels de Cauchy mais ne convergeant pas dans $\mathbb{Q}$.

(b) *Espaces complets* : GOURDON 2009b. Définition de la complétude. Exemple de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$. La complétude est une notion métrique : exemple de deux distances sur $\mathbb{R}$ définissant la même topologie mais sans que $\mathbb{R}$ ne soit complet pour l'une d'entre elles (QUEFFÉLEC 1998). Une partie d'un espace complet est complète ssi elle est fermée. Définition d'un Banach. Un produit fini de complets est complet. Un evn de dimension finie est de Banach. Caractérisation des Banach avec la convergence absolue. Exemple de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$. Si $E$ est un Banach, alors $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert et forme de l'inverse. Théorème des fermés emboîtés ; un métrique est compact ssi il est précompact et complet (QUEFFÉLEC 1998). Notion de complété, $\mathbb{R}$ est le complété de $\mathbb{Q}$. Si c'est maîtrisé, mentionner les $p$-adiques.

(c) *Exemples d'espaces complets* : fonctions continues bornées (SAINT-RAYMOND 2008), espace des fonctions holomorphes muni de la distance de la convergence uniforme sur tout compact (QUEFFÉLEC et ZUILY 2013). Théorème de Riesz-Fischer, exemple des $l^p$. Espace des applications linéaires continues.

## 2 Théorèmes fondamentaux

(a) *Prolongement des applications linéaires continues* : énoncé du théorème (QUEFFÉLEC 1998). Applications : définition de l'intégrale de Riemann (HIRSCH et LACOMBE 2009, p. 19). Fourier-Plancherel (deux choix : en prolongeant via $S(\mathbb{R}^d)$, WILLEM 1995 ; ou en prolongeant via $L^1 \cap L^2$, RUDIN 1970).

(b) *Théorème de point fixe* : ROUVIÈRE 2003, chapitre 4. Théorème de Picard, il reste vrai si une itérée seulement est contractante. Contre-exemples pour tester les hypothèses du théorème. Picard à paramètre. Application dans QUEFFÉLEC 1998, p. 162. Théorème de Cauchy-Lipschitz et préciser l'apport du théorème de point fixe à paramètre. Théorème d'inversion locale. Mentionner le théorème des fonctions implicites.

(c) *Théorème de Baire* : GOURDON 2009b. Enoncé, un evn admettant une base dénombrable n'est pas complet, exemple de $\mathbb{R}[X]$. Si $f$ est dérivable, $f'$ est continue sur un ensemble dense. Théorème de Banach-Steinhaus et applications aux séries de Fourier. Théorème de l'application ouverte, de l'isomorphisme de Banach. Si deux normes rendent $E$ complet et l'une est dominée par l'autre, elles sont équivalentes (sans référence). Théorème du graphe fermé (BRÉZIS 2005).

**3 Espaces de Hilbert** : HIRSCH et LACOMBE 2009

(a) *Définition*. Définition. Exemple de $L^2$, espaces euclidiens. Théorème de projection sur un convexe fermé. Théorème du supplémentaire orthogonal, théorème de Riesz. Théorème de Lax-Milgram.

(b) *Bases hilbertiennes* : définition (rester dans le cadre dénombrable). Théorème de Parseval-Bessel, inégalité de Bessel. Exemple des séries de Fourier, calcul de sommes. Espaces de Bergman.

# 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

**Développements** :
- Prolongement de $\Gamma$
- Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible
- *Formule des compléments*

**Références :** GOURDON 2009b, ROMBALDI 2004

**Plan :**
A réviser : théorème de Tietze

## 1 Aspects topologiques

(a) *Prolongement par continuité* : dans GOURDON 2009b, le théorème. Quelques exemples comme le sinus cardinal, $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ou $x \mapsto e^{-1/x^2}$ à inventer ou dans ROMBALDI 2004.

(b) *Prolongement par densité* : dans GOURDON 2009b, le théorème de prolongement des applications uniformément continues. Dans HIRSCH et LACOMBE 2009, la définition de l'intégrale de Riemann par ce moyen. Dans WILLEM 1995, l'espace de Schwartz est dense dans $L^2$, théorème de Fourier-Plancherel et application au calcul de $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$. Lemme de Riemann-Lebesgue.

(c) *Prolongement global* : dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, théorème de prolongement de $f : Y \mapsto \mathbb{R}$ à $X$ où $X$ métrique et $Y$ fermé ; application : si toute application de $X$ dans $\mathbb{R}$ est bornée, $X$ est compact. Dans QUEFFÉLEC 1998, théorème de Tietze-Urysohn.

(d) *Prolongement des formes linéaires* : dans BRÉZIS 2005, théorème de Hahn-Banach analytique (admis). Application : $\|x\| = \sup\limits_{f \in E'} |f(x)|$. Si $F \subset E$ est un sev tel que $F \neq E$, alors il existe une forme linéaire continue nulle sur $F$ et non nulle sur $E$.

## 2 Aspects différentiels

(a) *Prolongement des fonctions régulières* : POMMELLET 1997. le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, application au prolongement $\mathscr{C}^\infty$ de $x \mapsto e^{-1/x^2}$. Sans référence : si $f \in \mathscr{C}^k([a,b])$ et $y \in [a,b]$, alors $\varphi : x \neq y \mapsto \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ peut être prolongée en une fonction $\mathscr{C}^k$ en posant $\varphi(y) = f'(y)$. Contre-exemples au théorème : $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et 1 sinon. Applications aux fonctions plateaux. Dans ROUVIÈRE 2003, théorème de Borel ; si $f$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ admet des dérivées à tous ordres à droite et à gauche en $a$ et $b$, alors $f$ peut être prolongée en une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) *Prolongement et équations différentielles* : DEMAILLY 2006. Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}^m$ où $U$ ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, on considère $(E) : y' = f(y)$. Définition d'une solution, d'un prolongement d'une solution, d'une solution maximale. Toute solution se prolonge en une solution maximale. Théorème de Cauchy-Lipschitz local. Théorème de sortie de tout compact. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, cas particulier de $U = ]a,b[ \times \mathbb{R}^m$ ; si $f$ est continue bornée, toute solution est globale, exemple.

## 3 Aspects analytiques

(a) *Prolongement au bord des séries entières* : idem 243. **3**. Dans HAUCHECORNE 2007, les trois contre-exemples pour montrer que tout peut arriver. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, définition des points singuliers et réguliers, critère pour être un point régulier ; si tous les coefficients de la série entière de rayon de convergence 1 sont positifs, 1 est point singulier. Admis : il existe une série entière de rayon de convergence 1 qui converge uniformément sur $\overline{D(0,1)}$ mais pas normalement. Dans GOURDON 2009b, théorème d'Abel angulaire et taubérien faible.

(b) *Prolongement holomorphe* : Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, le principe des zéros isolés et de prolongement analytique, exemple de la fonction $\zeta$. Il existe une unique fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ pour tout $n$. Prolongement méromorphe de $\Gamma$, application à un calcul de transformée de Fourier. Formule des compléments (AMAR et MATHERON 2003), remarquer que cette formule donne une méthode pour prolonger $\zeta$.

# 208 : Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.

**Développements** :

- Théorème de Grothendieck
- Banach-Steinhaus et séries de Fourier
- *Espace de Bergman*

**Références :** GOURDON 2009b, SAINT-RAYMOND 2008, HIRSCH et LACOMBE 2009, HAUCHECORNE 2007. Secondaires : QUEFFÉLEC 1998

**Plan :**
**Cadre :** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## 1 Généralités

(a) *Espaces vectoriels normés* : SAINT-RAYMOND 2008. Définition, distance associée, inégalité triangulaire renversée, exemple de $(\mathscr{C}(X,\mathbb{K}), \|\cdot\|_\infty)$ si $X$ est métrique compact. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, contre-exemple de la distance de la convergence uniforme sur tout compact sur $\mathscr{C}(\Omega,\mathbb{C})$, qui n'est pas métrisable. Exemple évident de la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathbb{R}^n$, norme sur $L^p$. Définition de l'équivalence des normes, deux normes sont équivalentes si elles définissent la même topologie. Dans HAUCHECORNE 2007, exemple de deux normes non équivalentes. Norme sur un espace quotient.

(b) *Applications linéaires continues* : SAINT-RAYMOND 2008. Définition. Dans Pommellet, exemple de $\varphi : f \mapsto \int f(t)g(t)\mathrm{d}t$ et de $c : f \mapsto (c_n(f))_n$. Exemple d'application linéaire non continue dans HAUCHECORNE 2007. Espace $\mathscr{L}_c(E,F)$ et norme triple, cela définit une norme d'algèbre. Exemple de la norme de $\varphi$ ci-dessus. Dans HAUCHECORNE 2007, exemple d'application pour laquelle la norme n'est pas atteinte. Application de tout cela : différentielles.

(c) *Dual topologique d'un evn* : Définition. Dans GOURDON 2009b, caractérisation par le noyau fermé. Exemple de $(l^\infty)' = l^1$. Dans SAINT-RAYMOND 2008, théorème de Hahn-Banach analytique et application : $\|x\| = \sup_{f\in E'} |f(x)|$.

(d) *Cas de la dimension finie* : dans GOURDON 2009b, toute les normes sont équivalentes, dire qu'on a un contre-exemple en dimension infinie. Catalogue des conséquences avec un contre-exemple issu de HAUCHECORNE 2007 à chaque fois.

## 2 Espaces de Banach

(a) *Généralités* (cf 205) : GOURDON 2009b ou SAINT-RAYMOND 2008. Définition, exemple de $\mathscr{C}([a,b])$, des $l^p$, de $c_0(\mathbb{N},\mathbb{C})$ (SAINT-RAYMOND 2008). Un espace de dimension finie est de Banach. $E$ est de Banach ssi toute série absolument convergente est convergente, application : $\mathrm{GL}(E)$ est ouvert et expression de $(\mathrm{id}-u)^{-1}$. Complété d'un espace vectoriel normé. Théorème de Riesz-Fischer. Dans QUEFFÉLEC 1998, théorème de prolongement des applications uniformément continues et application à la définition de l'intégrale des fonctions réglées (HIRSCH et LACOMBE 2009) ; théorème de point fixe de Picard, mentionner Cauchy-Lipschitz et le théorème d'inversion locale.

(b) *Lemme de Baire et conséquences* : GOURDON 2009b. Énoncé, tout evn admettant une base dénombrable n'est pas complet, si $f$ est dérivable, sa dérivée est continue sur un ensemble dense. L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathscr{C}([0,1])$. Théorème de Banach-Steinhaus et séries de Fourier. Théorème de l'application ouverte et de l'isomorphisme de Banach, théorème de Grothendieck.

3 **Espaces de Hilbert** : HIRSCH et LACOMBE 2009

(a) *Généralités* : définition, Cauchy-Schwarz, égalité du parallélogramme. Exemple de $L^2$. Théorème de projection sur un convexe fermé. Application à la méthode des moindres carrés (ROUVIÈRE 2003. Théorème du supplémentaire orthogonal.

(b) *Applications linéaires continues* : théorème de Riesz, définition de l'adjoint, $\|TT^*\| = \|T\|^2$. Si on a la place : opérateurs compacts et diagonalisation des opérateurs symétriques compacts. Lax-Milgram.

(c) *Bases hilbertiennes* : définition (on se limite à des bases hilbertiennes dénombrables). Exemple de la base de Fourier. Théorème de Parseval. Espace de Bergman.

# 209 : Approximation d'une fonction par des polynômes et des polynômes trigonométriques.

**Développements** :

- Théorème de Weierstrass
- Banach-Steinhaus et séries de Fourier

**Références :** GOURDON 2009b, HIRSCH et LACOMBE 2009, DEMAILLY 2006, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005.

A réviser : polynômes orthogonaux, interpolation polynômiale
**Plan :**

## 1 Approximation polynômiale

(a) *Approximation locale* : GOURDON 2009b. Définition d'un développement limité en un point, $f$ admet un DL à l'ordre 1 ssi $f$ est dérivable, exemple de DL ($\frac{1}{1-x}$ et d'autres). Formule de Taylor avec reste intégral. Dans ROUVIÈRE 2003, formule générale et application au lemme de Morse. Inégalité de Taylor-Laplace, formule de Taylor-Young.

(b) *Fonctions analytiques* : GOURDON 2009b. Définition, exemple de exp et des polynômes. Critère d'analyticité à partir de Taylor-Laplace (Rombaldi). Contre-exemple de $x \mapsto e^{-1/x^2}$ prolongée par 0 en 0 qui est $\mathscr{C}^\infty$ mais pas analytique. Mentionner que les fonctions holomorphes sont les fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$.

(c) *Théorème de Weierstrass* : dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, théorème de Weierstrass à partir des polynômes de Bernstein. Dans GOURDON 2009b, théorème de Stone-Weierstrass ; contre-exemple : une limite uniforme polynômes sur $\mathbb{R}$ est un polynôme ; application : si $\forall n \in \mathbb{N}, \int f(t)t^n \mathrm{d}t = 0$, alors $f = 0$.

(d) *Polynômes orthogonaux* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Définition de $L^2(I, \rho)$, théorème d'existence des polynômes orthogonaux formant une base hilbertienne. Exemple des polynômes de Hermite.

## 2 Interpolation polynômiale : DEMAILLY 2006

(a) *Polynômes de Lagrange* : Définition et expression explicite, base de Lagrange. Majoration $\|f - P_n|_\infty \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\|\pi_{n+1}\|_\infty \|f^{(n+1)}\|_\infty$ si $P_n$ est un polynôme de Lagrange interpolant $f$ en $n$ points. Définition de la fonction d'amplification, expression et minoration dans le cas d'une subdivision régulière. Points d'interpolation de Tchebychev. Majoration de $\|\pi_{n+1}\|_\infty$ pour une subdivision régulière ou de Tchebychev. Exemple de $f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{x^2+\alpha^2}$ sur $[-1, 1]$ pour laquelle la suite des polynômes d'interpolation pour une subdivision donnée diverge point par point.

(b) *Méthodes de quadrature* : expliquer qu'on remplace $f$ par un polynôme d'interpolation pour calculer son intégrale de manière approchée. Ordre de la méthode. Méthode des rectangles, méthode des trapèzes, de Newton-Cotes (faire des dessins en annexe). Méthode de Simpson.

**3** **Approximation par des polynômes trigonométriques** : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013 et GOURDON 2009b. Définition du produit scalaire sur $L^2([0,2\pi])$ et de la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, noyau de Dirichlet et série de Fourier. Expression explicite du noyau de Dirichlet. Théorème de Banach-Steinhaus et application à la densité des fonctions continues $2\pi$-périodiques dont la série de Fourier diverge en 0. Noyau de Féjer, expression explicite, convergence en norme uniforme et dans $L^p$. Application : $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne. Théorème de Parseval et application au calcul de quelques sommes ($\sum \frac{1}{n^2}$ à tout hasard...). Théorème de Dirichlet, théorème de convergence normale. Formule sommatoire de Poisson et application.

# 213 : Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications

**Développements** :

- Espace de Bergman
- Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts
- *Théorème de Grothendieck*

**Références** : Hirsch et Lacombe 2009, Beck, Malick et Peyré 2005, Willem 1995, Queffélec et Zuily 2013, Rouvière 2003.

**Plan** :
**Cadre :** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $(H, \langle \cdot, \cdot, \rangle)$ Hilbert.

## 1 Généralités

(a) *Espaces préhilbertiens, espaces de Hilbert* : Hirsch et Lacombe 2009. Définition d'un espace préhilbertien réel/complexe, exemple du produit scalaire standard sur $\mathbb{K}^d$, de $\mathscr{C}([0,1], \mathbb{K})$, de $l^2(\mathbb{N})$. Inégalité de Cauchy-Schwarz, le produit scalaire définit une norme. Identité du parallélogramme. Définition d'un espace de Hilbert, $\mathbb{K}^d$ et $l^2(\mathbb{N})$ en sont. De manière générale, $L^2(\Omega, m)$ est un espace de Hilbert sur $(\Omega, \mathscr{F}, m)$ est un espace mesuré.

(b) *Orthogonalité* : dans Hirsch et Lacombe 2009 et Beck, Malick et Peyré 2005, définition de vecteurs orthogonaux, de parties orthogonales, de l'orthogonal $A^\perp$ d'une partie de $H$. Théorème de Pythagore. Petites propriétés : $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$, $A^\perp = (\overline{A})^\perp$, $((A)^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Vect}(A)}$. Une famille orthonormée est libre. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

(c) *Projection sur un convexe fermé* : Hirsch et Lacombe 2009. Le théorème, l'application dans Rouvière 2003 aux moindres carrés. Théorème du supplémentaire orthogonal et critère de densité qui s'ensuit. Théorème de Grothendieck (Zavidovique 2013). Dans Francinou, Gianella et Nicolas 2008, calcul de $\min_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}(1 + a_1x + \cdots + a_nx^n)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}$.

(d) *Théorème de Riesz* : dans Hirsch et Lacombe 2009, le théorème. Dans Beck, Malick et Peyré 2005, application au théorème de Hahn-Banach dans un Hilbert. Dans Hirsch et Lacombe 2009, l'adjoint d'un endomorphisme est bien défini, $u \mapsto u^*$ est une anti-involution de $\mathscr{L}(H)$, noyau et image de l'adjoint ; définition de la convergence faible, la convergence forte implique la convergence faible, théorème de Banach-Alaoglu.

## 2 Bases hilbertiennes

(a) *Définitions et exemples* : on se place d'emblée dans un Hilbert séparable. Dans Hirsch et Lacombe 2009, définition d'une base hilbertienne, caractérisation par Parseval-Bessel. Exemple des espaces de Bergman. Tout Hilbert admet une base hilbertienne (Beck, Malick et Peyré 2005). Un Hilbert séparable est isométrique à $l^2(\mathbb{N})$.

(b) *Bases hilbertiennes en analyse de Fourier* : dans Beck, Malick et Peyré 2005, la définition des coefficients de Fourier et des séries de Fourier, théorème de Féjer, en déduire une base hilbertienne de $L^2([0,2\pi])$. Formule de Parseval dans ce contexte et application à quelques calculs de sommes (QUEFFÉLEC et ZUILY 2013). Théorème de Dirichlet. Dans WILLEM 1995, le théorème d'échantillonnage de Shannon.

3 **Opérateurs linéaires continues sur un Hilbert** : HIRSCH et LACOMBE 2009. Définition du spectre, du rayon spectral. Dans $\mathbb{C}$, le rayon spectral est le maximum des modules des valeurs spectrales. Pour un opérateur hermitien, $\sigma(T) \subset [m, M]$ où $m = \inf\{\langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1\}$, $M = \sup\{\langle Tx, x\rangle, \|x\| = 1\}$. Définition d'un opérateur compact. Sans référence : $T$ est compact ssi pour toute suite $(x_n)$ faiblement convergente vers 0, $(T(x_n))$ converge fortement vers 0. Exemple des opérateurs compacts à noyaux. L'ensemble des opérateurs compacts est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts.

# 214 : Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications en analyse et en géométrie

**Développements :**

- Lemme de Morse
- Théorème des extrémas liés
- *Surjectivité de l'exponentielle*

**Références :** ROUVIÈRE 2003, GOURDON 2009b, CARTAN 1967, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, LAFONTAINE 1997. Secondaires : MNEIMNÉ et TESTARD 1986

C'est une leçon qui demande un certain travail : il est indispensable, selon le rapport du jury, de savoir démontrer et utiliser les théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites (cela se fait avec le théorème du point fixe, mais c'est assez technique), et c'est la seule leçon où les sous-variétés sont véritablement attendues, il faut donc s'entraîner à manipuler le théorème des sous-variétés et ses exemples d'applications.

**Plan** :

## 1 Théorème d'inversion locale

(a) *Énoncé et exemples* : ROUVIÈRE 2003. Définition d'un difféomorphisme, énoncé du théorème, contre-exemple si on enlève l'hypothèse $\mathscr{C}^1$, exemple d'un difféomorphisme local mais non global. Remarque sur le fait que le théorème est valable aussi pour des régularités $\mathscr{C}^k, k \geqslant 2$. Théorème d'inversion globale, d'inversion holomorphe. Exemple des coordonnées polaires.

(b) *Applications en algèbre linéaire* : Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, toute matrice suffisamment proche de $I_n$ est une racine $k$-ième. Dans MNEIMNÉ et TESTARD 1986, différentielle de l'exponentielle en 0 et application : $\mathrm{GL}_n$ n'a pas de sous-groupes arbitrairement petit. Dans ZAVIDOVIQUE 2013, surjectivité de l'exponentielle.

(c) *Applications en géométrie différentielle* : dans ROUVIÈRE 2003, lemme de Morse et application à l'étude de la position d'une surface par rapport à son plan tangent. Dans LAFONTAINE 1997, théorème des immersions et submersions (citer l'un des deux et dire que l'autre existe), remarquer qu'on a un inverse à gauche/à droite, cas de la dimension 1 ; théorème du rang constant.

## 2 Fonctions implicites

(a) *Enoncé et exemples* : ROUVIÈRE 2003. Énoncé du théorème, exemple du cercle. Le théorème est valable si on remplace $\mathscr{C}^1$ par $\mathscr{C}^k$. Expression de la différentielle de l'application obtenue par le TFI. Le TFI et le TIL sont équivalents.

(b) *Applications* : Dans ROUVIÈRE 2003, étude de la régularité des solutions de $x^3 + px + q = 0$. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, régularité des racines d'un polynôme et application : l'ensemble des polynômes scindés à racines simples est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$.

(c) *Théorème des extréma liés* : dans GOURDON 2009b, énoncé du théorème. Dans ROUVIÈRE 2003, application à l'inégalité arithmético-géométrique et à l'inégalité d'Hadamard, éventuellement à la mise en boîte optimale. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, application au théorème spectral.

**3 Lien avec les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ :**

(a) *Définition et caractérisations* : LAFONTAINE 1997. définition et théorème des quatre équivalences. Faire des dessins en annexe. Dire quelles équivalences viennent du TFI. Exemple de la sphère unité, du tore.

(b) *Espaces tangents* : Dans LAFONTAINE 1997, définition, c'est un espace vectoriel de dimension $p$. Dans ROUVIÈRE 2003, expressions équivalentes selon la définition de sous-variété choisie et interprétation géométrique du théorème des extréma liés.

(c) *Exemples de sous-variétés de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$* : ROUVIÈRE 2003. Exemples de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ avec espace tangent en $I_n$, de $O_n(\mathbb{R})$ et des matrices de rang $r \leqslant n$.

# 215 : Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.

**Développements :**
- Lemme de Morse
- Théorème des extrémas liés
- *Surjectivité de l'exponentielle*

**Références :** ROUVIÈRE 2003, GOURDON 2009b, CARTAN 1967, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005

**Plan :**
**Cadre :** $n, m \geqslant 1$, $U$ ouvert de $\mathbb{R}^n$.

## 1 Généralités sur la différentiabilité

(a) *Applications différentiables* : ROUVIÈRE 2003. Définition, unicité de la différentielle, exemple d'une fonction dérivable. Une application différentiable est continue, différentielle d'une combinaison linéaire, d'une composée, d'une application linéaire, d'une forme quadratique. Définition du gradient. Différentielle de l'inverse, de l'exponentielle (en 0), du déterminant. Définition d'une application de classe $\mathscr{C}^1$, d'un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

(b) *Dérivées partielles* : ROUVIÈRE 2003. Définition d'une dérivée directionnelle puis d'une dérivée partielle. Si $f$ est différentiable en $a$, expression de la différentielle à partir des dérivées partielles. Contre-exemple. Une application est $\mathscr{C}^1$ ssi elle admet des dérivées partielles continues en tout point. Définition de la jacobienne et formule de la chaîne (GOURDON 2009b).

(c) *Accroissements finis* : dans GOURDON 2009b, théorème des accroissements finis dans le cas réel et contre-exemple de $t \mapsto e^{it}$. Dans ROUVIÈRE 2003, IAF dans le cas différentiable, application au nombre de solutions d'un système ; théorème de convergence uniforme d'une suite d'applications différentiables, application à la différentielle de l'exponentielle.

## 2 Inversion locale et fonctions implicites (résumé de 214)

(a) *Théorème d'inversion locale* : ROUVIÈRE 2003. Énoncé du théorème, contre-exemple si on enlève l'hypothèse $\mathscr{C}^1$, surjectivité de l'exponentielle (ZAVIDOVIQUE 2013), toute matrice suffisamment proche de $I_n$ est une racine $k$-ième (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Théorème d'inversion globale.

(b) *Théorème des fonctions implicites* : ROUVIÈRE 2003, énoncé, application au cercle. Remarque sur le calcul de la différentielle de l'application définissant la surface implicite comme un graphe. Application à la régularité des racines d'un polynôme (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005).

## 3 Différentielles d'ordre supérieur

(a) *Applications plusieurs fois différentiables* : CARTAN 1967. Définition de la différentielle seconde, remarque sur l'identification $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \mathscr{B}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, R^m)$, définition d'une application de classe $\mathscr{C}^2$, théorème de Schwarz (admis). Dans ROUVIÈRE 2003, définition des dérivées partielles secondes, expression de la différentielle seconde à l'aide de celles-ci ; matrice hessienne, c'est une matrice symétrique. Définition de la différentielle d'ordre $p$, c'est une fonction $p$-linéaire, définition d'une application de classe $\mathscr{C}^p$, $\mathscr{C}^\infty$. Exemple de exp.

(b) *Formules de Taylor* : dans CARTAN 1967, formules de Taylor avec reste intégral, Taylor-Laplace, Taylor-Young. Dans GOURDON 2009b, théorème d'Hadamard. Dans ROUVIÈRE 2003, lemme de Morse.

## 4 Problèmes d'extremum

(a) *Différentielle et extréma libres* : dans ROUVIÈRE 2003, le théorème donnant les conditions du premier et deuxième ordre, exemple de $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2 + \frac{y^4}{4}$. Etude de de la position d'une surface par rapport à son plan tangent.

(b) *Extréma sous contraintes* : dans GOURDON 2009b, théorème des extréma liés. Dans ROUVIÈRE 2003, application à l'inégalité arithmético-géométrique et à l'inégalité d'Hadamard, éventuellement à la mise en boîte optimale. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, application au théorème spectral.

(c) *Recherche d'extremum* : dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 et QUARTERONI, SACCO et SALERI 2007, méthodes de gradient conjugué et à pas optimal.

# 218 : Applications des formules de Taylor.

**Développements :**

- Lemme de Morse
- Théorème central limite
- *Méthode de Newton*

**Références :** ROUVIÈRE 2003, DEMAILLY 2006, GOURDON 2009b, OUVRARD 2009, CARTAN 1967. Références secondaires : HAUCHECORNE 2007, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, BARBÉ et LEDOUX 2007

**Plan :**

$U$ ouvert de $E$ evn, $F$ evn, $I$ intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. S'il faut enlever quelque chose, ne pas mettre la partie sur l'intégration numérique et intégrer la méthode de Newton dans la deuxième partie.

1 **Formules de Taylor** : CARTAN 1967, GOURDON 2009b. Définition du polynôme, du reste de Taylor pour $f : U \to F$. Théorème de Taylor avec reste intégral. $f$ est polynomiale ssi les restes sont nuls à partir d'un certain rang (sans référence). GOURDON 2009b : théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, égalité de Taylor. Dans CARTAN 1967 : théorème de Taylor-Young, inégalité des accroissements finis (dans un autre chapitre), inégalité de Taylor-Lagrange.

2 **Applications en analyse** : GOURDON 2009b, ROUVIÈRE 2003, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b

(a) *Développements limités* : GOURDON 2009b. Définition d'un développement limité, unicité, faire le lien avec Taylor-Young. Exemples de développements limités classiques. Lien entre dérivabilité et DL à l'ordre 1. Contre exemple pour la dérivée seconde.

(b) *Séries entières* : GOURDON 2009b, la somme d'une série entière est somme de sa série de Taylor sur le disque de convergence. Corollaire pour les fonctions analytiques. Exemples de développements en série entière. Dans HAUCHECORNE 2007, exemple d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ qui n'est pas somme de sa série de Taylor en 0. Dans GOURDON 2009b, théorème de Bernstein et application à tan. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013 ou ROUVIÈRE 2003, théorème de Borel, dire que toute série entière de rayon de convergence non nul est le développement de Taylor d'une fonction $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0.

(c) *Suites récurrentes* : ROUVIÈRE 2003. Classification des points fixes (attractif / superattractif / répulsif). Suite convergeant vers le nombre d'or. Dans DEMAILLY 2006, exemples pour montrer qu'on ne peut rien dire si $F'(a) = \pm 1$.

(d) *Autres conséquences* : FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b. Théorème de Darboux. Exo sur l'application linéaire de $\mathscr{C}^2$ dans $\mathscr{C}^0$. Inégalités de Kolmogorov (p.270).

3 **Applications en analyse numérique**

(a) *Méthode de Newton* : ROUVIÈRE 2003. Enoncé du théorème, application à l'approximation du nombre d'or et des racines carrées. Mentionner la méthode de Newton-Raphson

(b) *Intégration numérique* : DEMAILLY 2006. Principe d'une méthode de quadrature, ordre de la méthode. Théorème d'évaluation de l'erreur. Tableau avec des exemples de méthodes (rectangles à gauche, point milieu, Simpson) : polynome d'approximation, majorant de l'erreur, ordre de la méthode

4 **Applications en géométrie** : ROUVIÈRE 2003

(a) *Convexité et extréma* : définition d'une fonction convexe, caractérisation quand $f$ est différentiable. Si $f$ est convexe, tout point critique est un minimum global. Position d'une surface par rapport à son plan tangent dans $\mathbb{R}^3$, dessins en annexe.

(b) *Étude affine locale d'une courbe plane* : énoncé du théorème, faire les dessins en annexe.

(c) *Lemme de Morse* : énoncé du théorème.

5 **Applications en probabilités** : OUVRARD 2009. Théorème des évènements rares de Poisson, théorème central limite. Application à la recherche d'un intervalle de confiance pour un sondage (BARBÉ et LEDOUX 2007). Condition suffisante d'analyticité d'une fonction caractéristique.

# 219 : Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.

**Développements** :
- Théorème des extrémas liés
- Méthode de gradient conjugué
- *Ellipsoïde de John-Loewner*

**Références :** GOURDON 2009b, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, HIRSCH et LACOMBE 2009, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, QUARTERONI, SACCO et SALERI 2007.

**Plan :**
**Cadre :** $E$, $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Dans ROUVIÈRE 2003, définition d'un extremum global/local.

## 1 Existence et unicité

(a) *Fonctions continues sur un compact* : GOURDON 2009b. Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Théorème de point fixe sur un compact. La distance entre un fermé et un compact est atteinte. En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

(b) *Fonctions holomorphes* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Formule de la moyenne, principe du maximum, le maximum est atteint sur le bord. Remarquer que le principe du maximum est vrai pour toute fonction vérifiant la propriété de la moyenne (on peut mentionner les fonctions harmoniques). Dans RUDIN 1970, lemme de Schwarz. Dans les exercices de BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 : si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $\overline{D(0,1)} \subset \Omega$, $f(0) = 1$ et$|f(z)| \geqslant 2$ pour $|z| = 1$, alors $f = 0$ sur $S(0,1)$. Remarque : il n'y a pas de principe du minimum, donner un contre-exemple. Théorème de Liouville et application à d'Alembert-Gauss (sans référence).

(c) *Extréma dans un Hilbert* : HIRSCH et LACOMBE 2009. Théorème de projection sur un convexe fermé, application aux moindres carrés (ROUVIÈRE 2003). Théorème de Lax-Milgram avec le cas symétrique.

(d) *Convexité et extréma* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Définition d'une fonction convexe, les lignes de niveau d'une fonction convexe sont convexes. Il existe au plus un point minimisant une fonction strictement convexe. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, log-concavité du déterminant, ellipsoïde de John-Loewner et sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

## 2 Extréma locaux et différentiabilité

(a) *Conditions du premier ordre* : dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, tout extremum local est un point critique, contre-exemple de $t \mapsto t^3$. Dans GOURDON 2009b, théorème de Rolle, mentionner les accroissements finis. Théorème de Darboux

(b) *Conditions du deuxième ordre* : dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, le théorème, contre-exemples pour montrer que les conditions ne sont pas nécessaires et suffisantes. Dans ROUVIÈRE 2003, lemme de Morse. Application à la position d'une surface par rapport à son plan tangent, dessins en annexe.

(c) *Conditions sous contraintes* : dans GOURDON 2009b, théorème des extréma liés. Dans ROUVIÈRE 2003, application à l'inégalité arithmético-géométrique et à l'inégalité d'Hadamard, éventuellement à la mise en boîte optimale. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, application au théorème spectral.

## 3 Recherche numérique d'extréma

(a) *Méthodes newtoniennes* : dans ROUVIÈRE 2003, la méthode de Newton, remarque : pour trouver les points critiques, on applique la méthode de Newton à $f'$ (sans référence). Mentionner la méthode de Newton-Raphson. Exemple : recherche de racines carrées

(b) *Méthodes de gradient* : dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, explication du principe des méthodes de descente. Dans QUARTERONI, SACCO et SALERI 2007, méthode de gradient conjugué et à pas optimal avec inégalité de Kantorovich.

# 220 : Équations différentielles $X' = f(t,X)$. Exemples d'études des solutions en dimension 1 et 2.

**Développements** :

- Théorème de Lyapunov
- Nombre de zéros d'une équation différentielle

**Références :** DEMAILLY 2006, GOURDON 2009b, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, ROUVIÈRE 2003, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009c, POMMELLET 1997.

**Plan :**

## 1 Théorie des équations différentielles

(a) *Existence et unicité des solutions* : DEMAILLY 2006. Définition d'une équation différentielle d'ordre 1, d'un problème de Cauchy, d'une solution maximale/globale. Remarque (GOURDON 2009b) sur comment transformer une équation d'ordre $p$ en une équation d'ordre 1. Toute solution se prolonge en une solution maximale. Exemple des solutions de $y' = y^2$. Forme intégrale de l'équation différentielle. Définition d'un cylindre de sécurité, théorème de Cauchy-Lipschitz local. Contre-exemple de $y' = |y|^{3/2}$. Dans ROUVIÈRE 2003, théorème de Cauchy-Lipschitz global, théorème de Schauder. Application à Cauchy-Arzela-Peano dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013.

(b) *Passage du local au global (ou prolonger des solutions)* : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013. On peut mettre le lemme de Gronwall (DEMAILLY 2006). Théorème de sortie de tout compact sous sa forme simple. Si $f$ est continue bornée, toute solution de $x' = f(t,x)$ est globale. Application : $x' = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ admet une unique solution globale.

## 2 Quelques équations différentielles particulières

(a) *Équations différentielles linéaires* (cf 221) : GOURDON 2009b. structure de l'espace des solutions (homogène/général), solutions de $Y' = AY$, application (POMMELLET 1997) : si $AB = BA, e^{A+B} = e^A e^B$. Piocher dans les exercices de Gourdon un exemple de résolution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Solutions de $y' = a(t)y$ sur $\mathbb{R}$ et résolution de $y' = a(t)y + b(t)$ avec la variation de la constante.

(b) *Techniques astucieuses pour certaines équations* : DEMAILLY 2006. Méthodes et exemples pour les équations à variables séparées, Bernoulli, Ricatti, équations homogèe.

(c) *Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra* : FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009c

(d) *Équations du type $y'' + qy = 0$* : FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009c. Si $q$ est continue et strictement négative, $y^2$ est convexe et $\dfrac{y^2(t)}{t}$ a une limite en $+\infty$. Si $q$ est continue croissante positive, alors $y$ a une infinité de zéros et est bornée. Théorème de Sturm. Nombre de zéros d'une équation différentielle (QUEFFÉLEC et ZUILY 2013).

(e) *Pendule simple* : FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009c. Exercice sur l'étude des solutions, sans oublier le portrait de phase.

## 3 Stabilité des systèmes différentiels autonomes

(a) *Définition* : dans Demailly 2006, la définition de stable/asymptotiquement stable/instable et les dessins pour illustrer.

(b) *Cas linéaire* : dans Rouvière 2003, le cas linéaire du théorème de Liapounov et dans Demailly 2006, les dessins pour illustrer tous les cas possibles.

(c) *Cas général* : dans Rouvière 2003, le théorème de Liapounov général. Dans Francinou, Gianella et Nicolas 2009c, l'application à l'équation de Van der Pol.

# 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

**Développements** :
- Théorème de Lyapunov
- Nombre de zéros d'une équation différentielle

**Références** : GOURDON 2009b, ROUVIÈRE 2003, DEMAILLY 2006, POMMELLET 1997

**Plan** :
**Cadre :** $K = \mathbb{R} ou \mathbb{C}$, $I$ intervalle de $\mathbb{R}$.

## 1 Généralités

(a) *Existence et unicité* : GOURDON 2009b. Définition d'une équation différentielle linéaire d'ordre $p$, expliquer comment on peut se ramener à une équation d'ordre 1. Théorème de Cauchy-Lipschitz version linéaire. Dans DEMAILLY 2006, écriture d'une EDO sous forme d'équation intégrale. Un contre-exemple où il n'y a pas unicité (équation non linéaire). Remarquer que pour une équation d'ordre $p$, la condition initiale dans Cauchy-Lipschitz correspond à $p$ conditions initiales sur $Y$ et ses dérivées.

(b) *Structure de l'espace des solutions* : dans GOURDON 2009b, l'espace des solutions d'une EDO linéaire homogène d'ordre 1 dans $K^n$ est de dimension $n$ ; dans le cas non homogène, c'est un espace affine de dimension $n$, méthode pour résoudre une équation non homogène à partir de son terme homogène. Dans POMMELLET 1997, le principe de superposition. Dans GOURDON 2009b, la définition du wronskien, il caractérise les bases de l'espace des solutions ; expression du wronskien des solutions de $Y' = AY$ sous la forme $W(t) = W(a)\exp\left(\int_a^t \mathrm{Tr}A(u)\mathrm{d}u\right)$.

## 2 Résolution explicite

(a) *Cas des coefficients constants* : GOURDON 2009b. Solutions de $Y' = AY$ avec $A$ matrice fixée, et exemple de résolution d'un système d'équations différentielles à coefficients constants. Corollaire : $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$ si $A$ et $B$ commutent (POMMELLET 1997). Solutions de $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = 0$ en fonction des racines du polynôme caractéristique, exemple d'application. Si $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ vérifie $(f + f')(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$, alors $f(t) \xrightarrow{t\to+\infty} 0$.

(b) *Cas des coefficients variables* : dans GOURDON 2009b, la méthode de variation de la constante suivie d'un exemple simple. Exemple de $y' = \dfrac{t}{1+t^2}y + 1$. Dans POMMELLET 1997, méthode de Liouville, exemple de $(t+1)y'' - y' - ty = 0$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009c, méthode pour rechercher des solutions développables en série entière et équation de Bessel.

## 3 Étude qualitative

(a) *Stabilité des équilibres* : dans DEMAILLY 2006, la définition d'un point d'équilibre stable/asymptotiquement stable. Dans ROUVIÈRE 2003, le théorème de Liapounov. Dans DEMAILLY 2006, les 4 illustrations des différents cas de figure pour $Y' = AY$ en dimension 2. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009c, équation de Van der Pol.

(b) *Quelques résultats sur les équations de type* $y'' + qy = 0$ : idem 220. Francinou, Gianella et Nicolas 2009c. Si $q$ est continue et strictement négative, $y^2$ est convexe et $\frac{y^2(t)}{t}$ a une limite en $+\infty$. Si $q$ est continue croissante positive, alors $y$ a une infinité de zéros et est bornée. Théorème de Sturm. Nombre de zéros d'une équation différentielle (Queffélec et Zuily 2013).

# 223 : Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.

**Développements** :

- Méthode de Newton
- Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible
- *Quelques ordres moyens*

**Références :** EL AMRANI 2011, GOURDON 2009b, ROUVIÈRE 2003, DEMAILLY 2006, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b,HAUCHECORNE 2007, TENENBAUM 2015, ROMBALDI 2004.

**Plan :** $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

## 1 Suites et convergence

(a) *Limite d'une suite* : EL AMRANI 2011. Définition d'une suite (lol), limite d'une suite, unicité de la limite, une suite convergente est bornée. Contre-exemple de $((-1)^n)_n$. Exemples idiots de suites convergentes / divergentes : $\frac{1}{n}$ et $n$. Le produit d'une suite convergeant vers 0 par une suite bornée est une suite convergente, exemple de $\frac{\sin n}{n}$. Limite d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Dans GOURDON 2009b, caractérisation séquentielle de la continuité. Contre-exemple de $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dans HAUCHECORNE 2007 (chercher au chapitre "continuité").

(b) *Valeurs d'adhérence* : EL AMRANI 2011. Définition d'une suite extraite, exemple de $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$. Toute suite extraite de $u$ convergente tend vers la même limite que $u$, réciproque fausse. Définition d'une valeur d'adhérence. Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence, exemple de $(1-(-1)^n)_n$ qui a une unique valeur d'adhérence mais ne converge pas. La suite $u$ converge ssi $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, définition de la $\liminf$ et $\limsup$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, l'une est inférieure à l'autre et il y a égalité ssi $u$ converge ; remarque : ce sont respectivement la plus petite et la plus grande valeur d'adhérence de $u$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ muni de $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ ; application : convergence d'une suite sous-additive et application à $\rho(T) = \lim \|T^n\|^{1/n}$ pour $T$ opérateur linéaire et au critère d'Hadamard pour le rayon de convergence (GOURDON 2009b).

(c) *Théorèmes de convergence* : EL AMRANI 2011. Une suite croissante majorée converge. Théorème des gendarmes. Définition des suites adjacentes, elles tendent vers la même limite. Exemples (GOURDON 2009b) de la moyenne arithmético-géométrique et du critère de convergence des séries alternées. Théorème des segments emboîtés et théorème de Bolzano-Weierstrass. La moyenne au sens de Césaro converge vers la même limite que $u$. Contre-exemple dans HAUCHECORNE 2007.

(d) *Suites de Cauchy* : EL AMRANI 2011. Définition, une suite convergente est de Cauchy, une suite de Cauchy est bornée. Toute suite de Cauchy converge, application : la convergence absolue implique la convergence.

## 2 Suites récurrentes (idem 226)

(a) *Généralités* : GOURDON 2009b. Théorème donnant le comportement de $(u_n)$ si $f$ est monotone. Si $u$ converge et $f$ est continue, la limite est un point fixe de $f$. Dans ROUVIÈRE 2003, exemple de $f = \sin$ et de $f = x \mapsto \cos(\lambda x)$. On peut rajouter la suite $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{u_n}}$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b, lemme de la grenouille et (p.99) la méthode des "petits pas" pour trouver un équivalent de $u_n$ à partir d'un DL de $f$. Suites arithmétiques, géométriques, homographiques.

(b) *Classification de l'attractivité* : DEMAILLY 2006. Le théorème de classification attractif/répulsif/superattractif avec estimation de la vitesse de convergence de $u$. Si $|f'(a)| = 1$, on ne peut rien dire, cf sin et sh. Remarque : un point fixe répulsif de $f$ est un point fixe attractif de $f^{-1}$. Dans ROUVIÈRE 2003, équivalent de $u$ quand $f = \sin$ : convergence lente ; mettre en annexe les dessins des trois cas de points fixes ; méthode de Newton et application à la recherche d'une racine carrée, mentionner Newton-Raphson.

**3 Comportement asymptotique** (cf 224)

(a) *Relations de comparaison* : GOURDON 2009b. Définition des trois relations de comparaison. Exemple de $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \sim e$ (sans référence). Développement asymptotique de $u$ définie par $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$. Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible. Quelques ordres moyens (Tenenbaum). On peut rajouter des exemples, dans ROMBALDI 2004, de développements asymptotiques de suites définies de manière implicite.

(b) *Sommation des relations de comparaison* : dans GOURDON 2009b, le théorème, et application au développement asymptotique de la série harmonique et formule de Stirling.

# 224 : Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.

**Développements** :

- Nombre de zéros d'une équation différentielle
- Quelques ordres moyens

**Références :** GOURDON 2009b, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b. Secondaires : ROUVIÈRE 2003, BARBÉ et LEDOUX 2007, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, ROMBALDI 2004 (si trouvable, fait un bon complément). Autre référence de secours : Dieudonné, *Calcul infinitésimal*.

**Plan :** Si on manque de place (ou de confiance !), enlever la méthode de Laplace et/ou MacLaurin. C'est une leçon très technique que je trouve casse-gueule, on a perdu l'habitude de toutes ces petites méthodes avec le temps.

1. **Comparaisons de suites et de fonctions** : GOURDON 2009b.

   (a) *Relations de comparaisons* : définition des relations de domination, négligeabilité et équivalence. Prendre soit la définition générale du Gourdon, soit la donner pour des fonctions et dire que c'est la même chose pour des suites. Sans référence : $f = o(g)$ ssi il existe $\varepsilon$ tendant vers 0 tel que $f = \varepsilon g$ ; même résultat pour les équivalents.

   Dans ROMBALDI 2004, exemple de $(\ln x)^\alpha = o_{+\infty}(x^\beta)$, $x^\beta = o(e^{\gamma x})$ ; $f$ tend vers 0 ssi $f = o(1)$, $f$ est bornée ssi $f = O(1)$, $f$ tend vers $l \neq 0$ ssi $f \sim l$ ; stabilité de $o$ et $O$ par produit et combinaison linéaire.

   Contre-exemple pour les équivalents et la somme, stabilité de l'équivalence par produit et puissance.

   (b) *Développements limités* : Définition, exemple des fonctions polynômiales (sans référence), exemple de $\frac{1}{1+x}$, unicité du DL, lien entre parité et DL autour de 0. Lien entre continuité et $DL_0$, entre dérivabilité et $DL_1$. Contre-exemple pour les ordres supérieurs. Formule de Taylor-Young, exemples d'applications (exp, $(1+x)^\alpha$). Mentionner le théorème central limite (BARBÉ et LEDOUX 2007). Stabilité des DL par combinaison linéaire, produit, quotient, intégration. Exemple pour la somme : $ch$. Contre-exemple pour la dérivation. Exemple : $\ln(1+x)$. Montrer comment marche la composition sur un exemple dans les exercices. Utilisation des DL pour régler des problèmes de forme indéterminée : $\dfrac{\tan x - x}{\sin x - x} \xrightarrow{x\to 0} 2$. Étude locale des courbes planes (ROUVIÈRE 2003), mettre les dessins correspondants en annexe.

   (c) *Développements asymptotiques* : définition d'une échelle de comparaison, exemple de $(x^\alpha)_{\alpha\in\mathbb{R}}$, $(x^\alpha(\ln x)^\beta)_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}$ en $+\infty$. Définition d'un développement asymptotique, remarquer que faire un DL, c'est faire un DA par rapport à l'échelle $((x-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Exemple dans les exercices du DA de $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$. Mentionner (sans référence) la stabilité du DA par somme, produit...

2. **Exemples de développements asymptotiques de fonctions** : GOURDON 2009b

   (a) *Intégration des relations de comparaison* : le théorème et son corollaire dans les exercices pour donner un équivalent de $\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$ quand $\dfrac{g'}{g} \sim \dfrac{\mu}{x}$. Application au développement asymptotique du logarithme intégral.

(b) *Méthode de Laplace* : le théorème (admis), et l'application à la formule de Stirling

(c) *Autres exemples* : Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, nombre de zéros d'une équation différentielle, avec le contre-exemple qui suit. Dans GOURDON 2009b : le développement autour de 1 de $\zeta$, l'exercice (p.154) pour obtenir un équivalent de $\sum_{n=0}^{+\infty} f(nt)$.

### 3 Exemples de développements asymptotiques de suites

(a) *Séries numériques* : Dans GOURDON 2009b, le théorème de sommation des relations de comparaisons et son application au développement asymptotique de la série harmonique. Le théorème de comparaison série-intégrale avec dessin en annee, application à un équivalent du reste de $\sum \frac{1}{n^2}$. Formule de Stirling. Quelques ordres moyens (Tenenbaum).

(b) *Suites récurrentes* : FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b autour de p 100. Si $u_{n+1} = f(u_n)$, l'exercice donnant l'équivalent de $u_n$ en fonction du développement limité de $f$ autour de 0, application à sin et ln. Les exercice sur $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$ et $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

(c) *Suites définies de manière implicites* : trois exos correspondant dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b, d'autres se trouvent dans le ROMBALDI 2004.

(d) *Formule d'Euler-MacLaurin* : GOURDON 2009b. La définition des polynômes et nombre de Bernoulli, la formule (admise). Application au développement asymptotique de la série harmonique.

# 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples et applications à la résolution approchée d'équations.

**Développements** :

- Méthode de Newton
- Méthodes itératives de résolution d'un système linéaire
- *Méthode de gradient conjugué*

**Références :** GOURDON 2009b, ROUVIÈRE 2003, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b

**Plan :**

**Cadre :**$I$ intervalle de $\mathbb{R}$, $E$ $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $f : I \mapsto E$, $u$ est définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

## 1 Généralités

Dans GOURDON 2009b, si $f$ est continue et$v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, alors$f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a)$. Contre-exemple de $x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dans HAUCHECORNE 2007 (chercher au chapitre "continuité").

(a) *Suites réelles* : GOURDON 2009b. Théorème donnant le comportement de $(u_n)$ si $f$ est monotone. Si $u$ converge et $f$ est continue, la limite est un point fixe de $f$. Dans ROUVIÈRE 2003, exemple de $f = \sin$ et de $f = x \mapsto \cos(\lambda x)$. On peut rajouter la suite $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-\sqrt{u_n}}$. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b, lemme de la grenouille et (p.99) la méthode des "petits pas" pour trouver un équivalent de $u_n$ à partir d'un DL de $f$.

(b) *Suites vectorielles* : GOURDON 2009b. Expliquer comme on étudie une suite définie par une relation de récurrence d'ordre $h$ : se ramener à une suite vectorielle $X_{n+1} = AX_n$ où $A$ est une matrice compagnon. Donner la forme générale de ces suites à partir des racines du polynôme caractéristique : c'est la réduction de Jordan ! Exemple de la suite de Fibonacci.

(c) *Exemples usuels de suites récurrentes* : GOURDON 2009b. Suites arithmétiques, géométriques, homographiques.

## 2 Suites récurrentes et points fixes

(a) *Théorème de point fixe de Picard* : ROUVIÈRE 2003. Énoncé du théorème avec majoration donnant la vitesse de convergence. Les trois contre-exemples qui suivent pour tester toutes les hypothèses. Dans DEMAILLY 2006, théorème de Cauchy-Lipschitz local. Le théorème est encore vrai si une itérée seulement est contractante. Théorème de point fixe sur un compact, contre-exemple des rotations.

(b) *Classification des points fixes* : DEMAILLY 2006. Le théorème de classification attractif/répulsif/superattractif avec estimation de la vitesse de convergence de $u$. Si $|f'(a)| = 1$, on ne peut rien dire, cf sin et sh. Remarque : un point fixe répulsif de $f$ est un point fixe attractif de $f^{-1}$. Dans ROUVIÈRE 2003, équivalent de $u$ quand $f = \sin$ : convergence lente ; mettre en annexe les dessins des trois cas de points fixes. Dans CIARLET 1988 (aussi dans Demailly), si $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une norme subordonnée $\|\cdot\|$ telle que $\|A\| \leqslant \rho(A)+\varepsilon$. Application : notion de point fixe attractif en dimension $n$. Autre application (CIARLET 1988) : méthodes itératives de résolution d'un système linéaire.

(c) *Etude de l'orbite d'une suite* (si c'est maîtrisé) : FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b. Définition d'un point $n$-périodique, d'une orbite. Etude de la suite "logistique" $x_{n+1} = 1-\lambda x_n^2$. Théorème de Sarkowski, application : si $f$ a un point 3-périodique alors elle a un point $n$-périodique pour tout $n$.

### 3 Méthodes numériques itératives

(a) *Méthode de Newton* : dans ROUVIÈRE 2003, méthode de Newton et application à la recherche d'une racine carrée, mentionner Newton-Raphson.

(b) *Méthodes de gradient* : dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 et QUARTERONI, SACCO et SALERI 2007, explication du principe d'une méthode de descente, méthodes de gradient conjugué et à pas optimal, dessins en annexe.

(c) *Méthode d'Euler* : DEMAILLY 2006. Principe de la méthode avec dessin et estimation de la vitesse de convergence.

# 228 : Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et applications.

**Développements** :
- Méthode de Newton
- Théorème de Weierstrass

**Références** :
- Principales : RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1995 (monotonie), GOURDON 2009b, HIRIART-URRUTY et LEMARÉCHAL 1993 (convexité), BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 (convexité, optimisation).
- Secondaires : HAUCHECORNE 2007, BRIANE et PAGÈS 2006, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008 (John-Loewner), FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009b (Helly), DURRETT 2010 (Helly), OUVRARD 2009, BARBÉ et LEDOUX 2007, NOURDIN 2006 (Glivenko-Cantelli)

A réviser : théorème de Bernstein. Inégalités de Kolmogorov.

## 1 Généralités

(a) *Continuité : premières propriétés* : GOURDON 2009b. définition de la continuité en un point, caractérisation séquentielle, exemple des polynômes. Dans HAUCHECORNE 2007, $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ et $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ne sont pas continues en 0. Prolongement par continuité, exemple du sinus cardinal. Stabilité de la continuité par combinaison linéaire, produit, composition, inverse.

(b) *Continuité sur un compact, uniforme continuité* : GOURDON 2009b. Une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Définition de l'uniforme continuité, exemple des fonctions lipschitziennes (SAINT-RAYMOND 2008). Dans HAUCHECORNE 2007, $x \mapsto x^2$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Théorème de Heine. Applications sans référence : une fonction périodique et continue sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue ; toute fonction continue est limite uniforme de fonctions affines par morceaux.

(c) *Dérivabilité et liens avec la continuité* : GOURDON 2009b. Définition de la dérivabilité, la dérivabilité implique la continuité. L'ensemble des fonctions continues nulle part dérivables est dense dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Définition de $\mathscr{C}^k$, exemple de exp, contre-exemple de $x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ dérivable mais pas $\mathscr{C}^1$. Stabilité de la dérivabilité par combinaison linéaire, produit, composition, inverse et expression de la dérivée dans ces cas. Formule de Leibniz. Dérivée d'une fonction réciproque, exemple de arccos, arctan, etc. Si $f$ est dérivable et admet un extremum local en $c$, alors $f'(c) = 0$.

## 2 Théorèmes fondamentaux

(a) *Théorème des valeurs intermédiaires* : dans GOURDON 2009b, les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, corollaire : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle. Contre-exemple d'une fonction vérifiant cette dernière propriété sans être continue (HAUCHECORNE 2007). Dans ROUVIÈRE 2003, méthode de Newton et application à l'approximation d'une racine carrée. Théorème de Darboux (GOURDON 2009a et exemple de la dérivée de $f : x \mapsto x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(b) *Théorème de Rolle* : GOURDON 2009b. Énoncé, contre-exemple de $t \mapsto e^{it}$. Application si $P$ est un polynôme scindé de degré supérieur à 2, $P'$ est scindé (ROMBALDI 2004).

(c) *Théorème des accroissements finis* : GOURDON 2009b. Énoncé, application au critère de croissance d'une fonction dérivable et à l'inégalité des accroissements finis. Contre-exemple dans le cas où on n'est pas sur un intervalle (ROMBALDI 2004 ?). Règle de l'Hospital. Prolongement en $a$ d'une fonction dérivable sur $I \setminus \{a\}$, continue sur $I$. (sans référence).

(d) *Formules de Taylor* : GOURDON 2009b. Formule de Taylor avec le TAF, formule de Taylor-Young, toute fonction $\mathscr{C}^n$ admet un DL à l'ordre n en tout point, contre-exemple de $x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. $f$ est dérivable ssi elle admet un DL à l'ordre 1. Taylor avec reste intégral, application au théorème de Bernstein. Inégalités de Kolmogorov (FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2007b).

**3 Suites de fonctions continues et dérivables** : GOURDON 2009b Une limite uniforme de fonctions continues est continue, contre-exemple pour la limite simple (HAUCHECORNE 2007). Théorèmes de Dini. Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein (QUEFFÉLEC et ZUILY 2013). Théorème de dérivabilité d'une limite uniforme.

**4 Étude de certaines classes de fonctions**

(a) *Fonctions monotones* : RAMIS, DESCHAMPS et ODOUX 1995. Une fonction monotone admet une limite à droite et à gauche en tout point, l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante est dénombrable. Une fonction croissante est continue sur l'intervalle $I$ ssi $f(I)$ est un intervalle et corollaire : une fonction continue strictement monotone sur $I$ induit un homéomorphisme sur son image. Exemple (sans référence) de sin et arcsin, ou toute autre fonction du même type. Dans HAUCHECORNE 2007, contre exemple d'une fonction strictement croissante discontinue sur un ensemble dense. Caractérisation de la monotonie avec la dérivée à droite, contre-exemple de $t \mapsto t^3$. Dans BRIANE et PAGÈS 2006 une fonction monotone sur $I$ est dérivable $\lambda$-pp (admis), et contre-exemple de l'escalier du diable.

(b) *Fonctions convexes* : GOURDON 2009b. Une fonction $f$ est convexe ssi $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante pour tout $x_0$ ; continuité sur l'intérieur et dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction convexe. Contre-exemple d'une fonction convexe sur $\mathbb{R}_+$ discontinue en 0 (HAUCHECORNE 2007). Caractérisation de la convexité pour les fonctions dérivables.

(c) *Equicontinuité* : HIRSCH et LACOMBE 2009. Définition d'une partie uniformément équicontinue, théorème d'Ascoli, applications à la compacité de l'ensemble des fonctions lipschitziennes de rapport donné et à l'étude des opérateurs compacts.

(d) *Intégrales à paramètres* : s'il reste de la place, donner le théorème de continuité/dérivabilité et quelques exemples (BRIANE et PAGÈS 2006).

# 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

**Développements** :

- Théorème de Helly
- Ellipsoïde de John-Loewner

**Références** :

- Principales : Ramis, Deschamps et Odoux 1995 (monotonie), Gourdon 2009b, Hiriart-Urruty et Lemaréchal 1993 (convexité), Beck, Malick et Peyré 2005 (convexité, optimisation).
- Secondaires : Hauchecorne 2007, Briane et Pagès 2006, Francinou, Gianella et Nicolas 2008 (John-Loewner), Francinou, Gianella et Nicolas 2009b (Helly), Durrett 2010 (Helly), Ouvrard 2009, Barbé et Ledoux 2007, Nourdin 2006 (Glivenko-Cantelli)

## 1 Fonctions monotones

(a) *Premières propriétés* : Ramis, Deschamps et Odoux 1995. Définition d'une fonction (strictement) (dé)-croissante, exemples triviaux de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et exp, exemple de la fonction de répartition d'une variable aléatoire (sans référence). L'ensemble des fonctions croissantes est un cône, le produit de deux fonctions croissantes positives est croissante. Dans Gourdon 2009b, exemple des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, $f$ monotone.

(b) *Régularité* : Ramis, Deschamps et Odoux 1995. L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction croissante est dénombrable. Une fonction croissante est continue sur l'intervalle $I$ ssi $f(I)$ est un intervalle et corollaire : une fonction continue strictement monotone sur $I$ induit un homéomorphisme sur son image. Exemple (sans référence) de sin et arcsin, ou toute autre fonction du même type. Dans Hauchecorne 2007, contre exemple d'une fonction strictement croissante discontinue sur un ensemble dense. Caractérisation de la monotonie avec la dérivée à droite, contre-exemple de $t \mapsto t^3$. Dans Briane et Pagès 2006 une fonction monotone sur $I$ est dérivable $\lambda$-pp (admis), et contre-exemple de l'escalier du diable.

(c) *Fonctions à variation bornées* : Gourdon 2009b. Définition et notation $V_{a,b}$, détermination de cet ensemble pour $f$ monotone, l'espace des fonctions à variations bornées est engendré par les fonctions monotones. Exemple de $x \mapsto x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui n'est pas à variations bornées.

(d) *Suites de fonctions monotones* : une limite simple de fonctions monotones est monotone (sans réf). Théorème de Helly (Francinou, Gianella et Nicolas 2009b) et application aux probabilités (Durrett 2010). Théorème de Dini et application à Glivenko-Cantelli (Nourdin 2006).

## 2 Fonctions convexes

(a) *Définition et premières propriétés* : Hiriart-Urruty et Lemaréchal 1993. Définition dans $\mathbb{R}^n$ d'une fonction convexe, strictement convexe, concave. Les fonctions affines sont convexes et concaves. Caractérisation avec l'épigraphe. Exemple de

$f : x \mapsto \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle$. Inégalité $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$. Petites propriétés : l'ensemble des fonctions convexes est un cône ; une limite simple, un sup de fonctions convexes est convexe. Définition de la log-convexité et exemple de l'exponentielle (sans réf). La fonction $\Gamma$ est l'unique fonction log-convexe telle que $f(1) = 1$ et $\forall t, f(t+1) = tf(t)$ (Buchwalter, mais sa démo n'est pas optimale).

(b) *Régularité des fonctions convexes réelles* : GOURDON 2009b. Théorème de continuité sur l'intérieur. Lemme des trois pentes (dessin en annexe), une fonction convexe est dérivable à gauche et à droite en tout point. Une fonction dérivable est convexe si sa dérivée est croissante, corollaire : une fonction convexe dérivable est $\mathscr{C}^1$. Une fonction convexe et majorée est constante. Exemple de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

## 3 Applications

(a) *Comparaisons série-intégrale* : GOURDON 2009b. Théorème de comparaison et application au développement de la série harmonique et aux séries de Bertrand.

(b) *Inégalités de convexité* : Dans GOURDON 2009b : inégalité arithmético-géométrique, inégalités de Hölder et Minkowski pour des sommes. Dans BRIANE et PAGÈS 2006, application à l'inégalité de Hölder sur les intégrales, $L^p$ est un evn et $p \mapsto \|\cdot\|_p$ est croissante si l'espace est de mesure fini. Inégalité de Young (HIRSCH et LACOMBE 2009). Dans BARBÉ et LEDOUX 2007 : inégalité de Jensen, application à $|\mathbb{E}[X]| \leqslant \mathbb{E}[|X|]$. Dans OUVRARD 2009, inégalité de Hoeffding et son corollaire.

(c) *Optimisation* : dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, une fonction strictement convexe admet au plus un minimum global ; une fonction convexe différentiable sur un ouvert admet pour minimum global tout point critique. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, log-concavité stricte du déterminant, ellipsoïde de John-Loewner et application aux sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Dans ROUVIÈRE 2003, méthode de Newton et application à la recherche de racine carrée. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 ou QUARTERONI, SACCO et SALERI 2007, méthode de gradient à pas optimal.

# 230 : Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.

**Développements** :

- Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible
- Quelques ordres moyens

Références :

Plan :

# 234 : Espaces $L^p$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$

**Développements :**

- Théorème de Grothendieck
- Espace de Bergman

**Références :** BRIANE et PAGÈS 2006, WILLEM 1995, HIRSCH et LACOMBE 2009, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, BARBÉ et LEDOUX 2007. Secondaires : ZAVIDOVIQUE 2013, RUDIN 1970, Bayer-Margaria.

**Plan :**

(cf Florian Lemmonier) Cadre (notations de BRIANE et PAGÈS 2006) : $(X, \mathscr{A}, \mu)$ espace mesuré, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\lambda$ est la mesure de Lebesgue.

## 1 Généralités : BRIANE et PAGÈS 2006.

(a) *Espaces $\mathscr{L}^p$* : chapitre 9. Définition (attention, la définition de $\mathscr{L}^\infty$ est à part et pas triviale) des espaces et de $\|\cdot\|_p$. Lemme caractérisant $\mathscr{L}^\infty$ par l'égalité presque partout avec une fonction mesurable bornée. Exemple des mesures de comptages. Inégalités de Holder, Cauchy-Schwarz et Minkowski, dire que $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme.

(b) *Espaces $L^p$*. Définition. Rapide explication sur la bonne définition de la norme. Complétude (ne pas oublier de dire qu'une sous-suite converge presque partout).

(c) *Convergence dans les espaces $L^p$*. Contre-exemple pour montrer que la convergence dans $L^p$ n'implique pas la convergence presque partout. Convergence dominée dans $L^p$, application à un calcul d'intégrales en exo. Mentionner le théorème de régularité des intégrales à paramètres. Contre exemple (p. 135) avec la bosse glissante pour montrer que l'hypothèse de domination n'est pas toujours vérifiée même si on a convergence dans $L^p$.

(d) *Densité dans les espaces $L^p$*. Les fonctions étagées intégrables sont denses (attention, cas particulier de $L^\infty$ p 173). Densité des fonctions en escalier à support compact, remarque pour généraliser ça à $\mathbb{R}^d$. Application : densité des fonctions continues à support compact. Séparabilité de $L^p$, non séparabilité de $L^\infty$. Densité de $L^1 \cap L^2$ dans $L^2$ (sans réf ?)

## 2 Relations entre les $L^p$. BRIANE et PAGÈS 2006, HIRSCH et LACOMBE 2009

(a) *Relations d'inclusions* : BRIANE et PAGÈS 2006. Inclusions topologiques pour une mesure finie. Exemple des mesures de comptages. Contre-exemples pour montrer qu'on ne peut rien dire dans le cas général. Théorème de Grothendieck (ZAVIDOVIQUE 2013). Proposition p. 171 : $\|f\|_\infty = \lim_{p\to+\infty} \|f\|_p$.

(b) *Dualité* : BRIANE et PAGÈS 2006 et HIRSCH et LACOMBE 2009. Essentiellement admis. Théorème de Radon-Nikodym (BRIANE et PAGÈS 2006 p. 204), théorème de dualité pour $1 < p, p' < \infty$ (BRIANE et PAGÈS 2006). En exemple, le cas des espaces $l^p$ qui est plus facile. Contre exemple pour $L^1$ : HIRSCH et LACOMBE 2009, p. 142.

## 3 Exemples d'utilisation des espaces $L^p$.

(a) *Convolution* : BRIANE et PAGÈS 2006. Définition de l'opérateur de translation, uniforme continuité (découle des résultats de densité de la partie 1). Définition du produit de convolution, convolution $L^p - L^q$ (uniforme continuité, limite à l'infini) où $p, q$ sont conjugués. Inégalité de Young (HIRSCH et LACOMBE 2009, p. 149). Convolution dans $L^1$, $(L^1, +, *)$ est une algèbre commutative sans unité. Suites régularisantes, exemple. La convolée de $f$ intégrable et $g \in \mathscr{C}_c^\infty$ est $\mathscr{C}^\infty$ (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005). Théorème $f * \alpha_n \to f$ dans $L^p$ ; application à la densité des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact.

(b) *En probabilités* : BARBÉ et LEDOUX 2007. Convergence en probabilité, la convergence $L^p$ implique la convergence en proba, uniforme intégrabilité et théorème de Vitali, contre-exemple. Loi des grands nombres fortes et théorème central limite.

## 4 Le Hilbert $L^2$ :

(a) *Conséquences de la structure hilbertienne* : BRIANE et PAGÈS 2006. Donner le produit scalaire, mentionner le théorème de projection sur un convexe fermé. Théorème de Riesz adapté : donc $L^2$ est isométrique à son dual. Espaces de Bergman.

(b) $L^2([0, 2\pi])$ *et les séries de Fourier* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Produit scalaire, base hilbertienne, définition de la série de Fourier, Parseval-Bessel, application au calcul de séries.

(c) *Transformée de Fourier* : WILLEM 1995. Définition, résultat sur la convolution dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, inversion de Fourier. Conséquence : injectivité dans $L^1$. Prolongement de la TF à $L^2$. Théorème d'échantillonnage de Shannon.

# 235 : Problèmes d'interversion de limites et d'intégrales.

**Développements** :

- Espace de Bergman
- Formule des compléments
- *Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible*
- *Inversion de Fourier*

**Références :** BRIANE et PAGÈS 2006, GOURDON 2009b, HAUCHECORNE 2007, BONY 2001. Secondaires : AMAR et MATHERON 2003, AIGNER et ZIEGLER 2013.

**Plan :**
**Cadre :** $(X, \mathscr{A}, \mu)$ espace mesuré, on note $\lambda$ la mesure de Lebesgue

## 1 Interversions limite-intégrale

(a) *Suites et séries de fonctions positives* : BRIANE et PAGÈS 2006. Théorème de convergence monotone, application (dans les exercices) à la limite de $I_n(\alpha) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} \mathrm{d}x$. Lemme de Fatou, corollaire : si une suite $(f_n)$ de fonctions intégrables converge simplement vers $f$ et $\sup_n \|f_n\|_1 < +\infty$, alors $f \in L^1$ ; si $f$ est croissante sur $[0,1]$, presque partout dérivable sur $[0,1]$ alors $\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x \leqslant f(1) - f(0)$, exemple de l'escalier du diable où l'égalité est stricte (ou tout simplement $\mathbb{1}_{[1/2,1]}$.

(b) *Problèmes de convergence dominée* : BRIANE et PAGÈS 2006. Dans HAUCHECORNE 2007, deux contre-exemples où on ne peut appliquer la convergence dominée : la "masse concentrée en un point" et la "bosse glissante". Théorème de convergence dominée, remarquer qu'on retrouve l'interversion quand il y a convergence uniforme. Formule des compléments (AMAR et MATHERON 2003). Théorème d'interversion série-intégrale, application : si $\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty$, alors $\mu(\limsup A_n) = 0$.

(c) *Régularité des intégrales à paramètre* : BRIANE et PAGÈS 2006. Théorème de continuité sous l'intégrale, contre-exemple (HAUCHECORNE 2007) de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} x e^{-xt} \mathrm{d}t$. Théorème de dérivation sous l'intégrale, application à $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} \mathrm{d}t =$ arctan $x$, dérivées de la fonction $\Gamma$.

## 2 Intégrales multiples : théorèmes de Fubini

**2 Intégrales multiples : théorèmes de Fubini** : BRIANE et PAGÈS 2006. Contre-exemple au théorème de Fubini, énoncé des théorèmes de Fubini, Fubini-Tonnelli. Application aux sommes doubles. Application : calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x$, du volume de la boule unité euclidien. Dans AIGNER et ZIEGLER 2013, calcul de $\zeta(2)$.

## 3 Interversion de limites

(a) *Limites et convergence uniforme* : GOURDON 2009b. Une limite uniforme de fonctions continues est continue, cas de la convergence normale. Dans HAUCHECORNE 2007, ce n'est pas vrai pour la convergence simple, remarquer que la convergence uniforme autorise les interversions de type $\lim\limits_{y \to x}(\lim\limits_{n \to +\infty} f_n)(y) = \lim\limits_{n \to +\infty}(\lim\limits_{y \to x} f_n(y))$. Théorème sur la dérivation d'une limite uniforme, application à l'exponentielle.

(b) *Le cas des séries entières* : GOURDON 2009b. Définition d'une série entière, lemme d'Abel, rayon de convergence ; il y a convergence normale sur tout disque fermé inclus dans le disque de convergence. Critères d'Hadamard et d'Alembert. Holomorphie de la somme et expression de la dérivée (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005). On ne peut rien dire au bord (HAUCHECORNE 2007, les trois contre-exemples). Théorème d'Abel angulaire et théorème taubérien faible. Espaces de Bergman.

4 **Applications à l'analyse de Fourier** : dans GOURDON 2009b, définitions des coefficients de Fourier, lemme de Riemann-Lebesgue. Dans BONY 2001, définition de la transformée de Fourier, elle est continue, tend vers 0 à l'infini et est bornée ; transformée de Fourier d'une gaussienne ; définition de l'espace de Schwartz, inversion de Fourier. Formule sommatoire de Poisson et corollaires.

# 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.

**Développements** :

- Inversion de Fourier
- Formule des compléments

**Références :** GOURDON 2009b, BRIANE et PAGÈS 2006. Secondaires : AIGNER et ZIEGLER 2013.

**Plan :**

## 1 Méthodes directes

(a) *Calculs de primitives usuelles* : GOURDON 2009b. Théorème fondamental de l'analyse, primitive de $\dfrac{1}{x^2+\alpha^2}$, de $\dfrac{1-x}{(1+x+x^2)^2}$. Calcul de $\int sin^n \cos^m$ quand $m$ et $n$ sont pairs.

(b) *Intégration par parties* : GOURDON 2009b. Théorème d'IPP, remarque sur la généralisation à des intervalles non bornés (sans référence). Intégrales de Wallis. Dans BRIANE et PAGÈS 2006, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(c) *Changement de variables* : BRIANE et PAGÈS 2006. Théorème de changement de variable multidimensionnel. Exemple : si $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$, $\int_{\mathbb{R}^d} f(Ax+b)\mathrm{d}x = \dfrac{1}{|\det A|}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{d}x$. Dans GOURDON 2009b, cas unidimensionnel ; calcul de $\int sin^n \cos^m$ cas général. Coordonnées polaires, calcul de $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, volume de la boule unité.

(d) *Théorème de Fubini* : BRIANE et PAGÈS 2006. Théorème de Fubini, de Fubini-Tonnelli. Application : calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\mathrm{d}x$. Dans AIGNER et ZIEGLER 2013, calcul de $\zeta(2)$.

## 2 Convergence et intégrales à paramètres

(a) *Sommes de Riemann* : GOURDON 2009b. Définition, critère d'intégrabilité au sens de Riemann. Application (dans les exercices) : calcul de $I(\rho) = \displaystyle\int_0^{\pi} \log(1 - 2\rho\cos\theta + \rho^2)\mathrm{d}\theta$.

(b) *Suites et séries de fonctions* : BRIANE et PAGÈS 2006. Théorème de convergence dominée, théorème d'interversion séries-intégrales. Exemples : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{e^x-1}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+1}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$. Dans GOURDON 2009b, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}\mathrm{d}x = 2\zeta(3)$.

(c) *Intégrales à paramètres* : BRIANE et PAGÈS 2006. Théorème de continuité sous l'intégrale, dire en remarque qu'on a un résultat similaire pour la dérivabilité, application à $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}\mathrm{d}t = \arctan x$. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY

2013, définition de la transformée de Fourier, transformée de Fourier d'une gaussienne, inversion de Fourier, dire que c'est encore vrai dans $L^1$ (admis) et appliquer cela à des calculs d'intégrales (DURRETT 2010). Dans WILLEM 1995, formule de Fourier-Plancherel dans $L^2$, application au calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2} \mathrm{d}x$.

**3 Méthodes complexes et résidus**

(a) *Théorème de prolongement analytique* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. L'énoncé du théorème et l'application (dans les exercices) à la transformée de Fourier d'une gaussienne.

(b) *Théorème des résidus* : AMAR et MATHERON 2003, chapitre 8. Énoncé du théorème, comment calculer le résidu en un pôle d'ordre $k$, plein d'exemples qui suivent avec les dessins en annexe, dont la formule des compléments. Dire qu'on s'en sert pour prolonger la fonction $\zeta$.

**4 Méthodes de calculs approchés d'intégrales** : DEMAILLY 2006.

Définition d'une méthode de quadrature élémentaire, de l'ordre Méthodes des rectangles à gauche, à droite, méthode du point milieu, méthode des trapèzes.

# 239 : Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.

**Développements** :

- Prolongement de $\Gamma$
- Inversion de Fourier
- *Formule des compléments*

**Références** : Principales : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, BRIANE et PAGÈS 2006, BONY 2001. Secondaires : RUDIN 1970, WILLEM 1995, BARBÉ et LEDOUX 2007, OUVRARD 2009, FOATA et FUCHS 2003.

**Plan** :

**Cadre :** $(X, \mathscr{A}, \mu)$ espace mesuré, $E$ métrique. Le plan est donné essentiellement par QUEFFÉLEC et ZUILY 2013.

1 **Régularité** : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013. Fixer les notations si $f : E \times X \to \mathbb{C}$, on note $F : t \to \displaystyle\int_X f(t,x)\mathrm{d}\mu(x)$ (si elle est bien définie).

(a) *Continuité* : théorème de continuité sous l'intégrale, remarque sur la domination sur tout compact. Application à la continuité de $\Gamma$. Ajouter (même si ça ne nécessite pas la continuité !) que $\Gamma$ est l'unique fonction log-convexe vérifiant $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ pour tout $t > 0$ (Buchwalter). Contre-exemple (HAUCHECORNE 2007) : pour $f : (x,t) \mapsto xe^{-xt}$, $F$ n'est pas continue en 0. Dans BRIANE et PAGÈS 2006 : si $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in X = \mathbb{R}$, alors pour tout $f$ intégrale, $u \to \displaystyle\int_{-\infty}^{u} f(x)\mathrm{d}\mu(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) *Dérivabilité* : théorème donnant la régularité $\mathscr{C}^k$ de $F$ (les hypothèses sont trop fortes dans le QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, il suffit d'avoir une domination sur la $k$-ième dérivée seulement). Dans GOURDON 2009b : si $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\mathrm{d}t$, $I(x) = \arctan x$ ; formule sommatoire de Poisson et application. Éventuellement : intégrale de Bessel dans FGN Analyse 4.

(c) *Holomorphie* : théorème d'holomorphie sous l'intégrale. Application (BECK, MALICK et PEYRÉ 2005) : prolongement méromorphe de la fonction $\Gamma$. On peut parler de la formule des compléments.

2 **Convolution** :

(a) *Convolution et régularisation* : BRIANE et PAGÈS 2006. Définition de $f \star g$ en toute généralité, puis différents cas où le produit de convolution est bien définie : si $f$ est localement intégrable et $g$ bornée à support compact ; si $f \in L^p$, $g \in L^q$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, $f \star g \in L^r$, avec inégalité de Young + cas particulier $p = \infty$ (HIRSCH et LACOMBE 2009). $(L^1, +, \star)$ est une algèbre commutative sans unité. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, dérivation du produit de convolution, exemple de régularisation par une gaussienne et application à la recherche de solutions d'une EDP.

(b) *Identités approchées* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Définition, exemple générique construit à partir de $\varphi$ positive intégrable d'intégrale 1, dire qu'en plus on obtient une suite de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact si $\varphi$ l'est. Concrètement, $\varphi : x \mapsto \frac{1}{c}\exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$ pour $|x| < 1$ et 0 sinon, convient. Théorème de convergence $f \star \varphi_n \to f$ uniformément sur tout compact et dans $L^p$ si $f$ est continue borné. Application : densité de $\mathscr{C}_c^\infty$ dans $L^p$. Théorème de Féjer, $t \mapsto e^{int}$ donne une base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$. Théorème de Stone-Weierstrass.

## 3 Transformation de Fourier

(a) *Définition dans $L^1$* : dans BONY 2001, définition, continuité, limite à l'infini. Transformée de Fourier d'une Gaussienne. Dans RUDIN 1970, transformée de Fourier de $H_\lambda : t \mapsto e^{-\lambda|t|}$, inversion de Fourier dans $L^1$, injectivité de la TF. Ajouter $f \hat{\star} g = \hat{f} \star \hat{g}$.

(b) *Propriétés de régularité* : BONY 2001. Définition de l'espace de Schwartz, il contient les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact et les gaussiennes ; stabilité par dérivation et multiplication par un polynôme. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, formule d'inversion de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. Dérivées d'une transformée de Fourier. Dans WILLEM 1995, théorème de Fourier-Plancherel et formule $\int \varphi\overline{\hat{\psi}} = \int \overline{\hat{\varphi}}\psi$, application au calcul de l'intégrale $\int \text{sinc}^2$.

## 4 Intégrales à paramètre en probabilités

(a) *Fonction caractéristique* : dans BARBÉ et LEDOUX 2007, définition, elle caractérise la loi. Calcul de fonctions caractéristiques pour une loi de Poisson ou une loi exponentielle. Calcul de $\varphi_{(X_1,\dots,X_d)}$ et $\varphi_{X+Y}$ quand il y a indépendance. Dans OUVRARD 2009, lien entre dérivées de la fonction caractéristique et moments, condition suffisante d'analyticité de la fonction caractéristique. Dans BARBÉ et LEDOUX 2007 : si deux va bornées ont mêmes moments à tous ordres, elles ont la même loi. Théorème de Lévy (admis) et contre-exemple. Théorème central limite.

(b) *Transformée de Laplace* : FOATA et FUCHS 2003. Définition, développement en série entière autour de 0, elle caractérise la loi. Comportement vis à vis de l'indépendance. Exemple des lois $\mathscr{E}(\lambda)$ et $\Gamma(n, \lambda)$. Dans OUVRARD 2009, inégalité de Hoeffding et application à un critère de convergence presque sûre.

# 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.

**Développements** :

- Théorème de Helly
- Prolongement de $\Gamma$
- *Banach-Steinhaus et séries de Fourier*
- *Formule sommatoire de Poisson*

**Références** : GOURDON 2009b, HAUCHECORNE 2007, BRIANE et PAGÈS 2006, AMAR et MATHERON 2003, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005.

**Plan** :

## 1 Convergence : GOURDON 2009b, HAUCHECORNE 2007.

(a) *Modes de convergences*. Dans GOURDON 2009b, définition de la convergence simple et de la convergence uniforme, la CVU implique la CVS. Contre-exemple (HAUCHECORNE 2007). Critère de Cauchy de la CVU. Norme de la convergence uniforme sur l'ensemble des fonctions bornées. Convergence normale. La CVN implique la CVU. Contre-exemple (HAUCHECORNE 2007). Théorème de Helly et son application en probabilités.

(b) *Régularité de la limite* : Dans GOURDON 2009b, la limite uniforme de fonctions continues est continue. Contre-exemple pour la convergence simple (HAUCHECORNE 2007). Théorème de Weierstrass par les polynomes de Bernstein (QUEFFÉLEC et ZUILY 2013). Application : si $\int_0^1 f(t)t^n \mathrm{d}t = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, alors $f = 0$ (bien chercher dans le Gourdon). Théorème de Stone-Weierstrass trigonométrique. Théorèmes de Dini. Théorème de CVU sur la dérivée, dire en remarque qu'on a un résultat similaire pour la classe $\mathscr{C}^k$. Exemple de l'exponentielle. Contre-exemple d'une suite de fonctions $\mathscr{C}^1$ convergeant uniformément sur $\mathbb{R}$ mais donc la suite des dérivée n'admet pas de limite simple sur $\mathbb{R}$.

## 2 Intégrabilité

(a) *Convergence dans $L^p$*. Ici, $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est un espace mesuré. Dans BRIANE et PAGÈS 2006, définition de la convergence presque partout, définition brève de $L^p$, $p < \infty$, théorème de Riesz-Fischer en n'oubliant pas la sous-suite qui converge presque partout. Contre-exemple d'une suite convergeant dans $L^p$ mais pas presque partout. Contre exemple d'une suite convergeant simplement mais pas dans $L^1$ (HAUCHECORNE 2007).

(b) *Théorèmes d'interversion* : BRIANE et PAGÈS 2006. Permutation limite intégrale pour une convergence uniforme (GOURDON 2009b). Théorème de convergence dominée $L^p$, exemple de calcul d'intégrale en exo, théorème d'interversion série-intégrale. Application : $\int \frac{\sin x}{e^x - 1} \mathrm{d}x = \sum_n \frac{1}{n^2+1}$.

## 3 Séries entières et holomorphie

(a) *Séries entières* : GOURDON 2009b. Définition, exemples $(\exp, \sin, \cos)$. Lemme d'Abel, rayon de convergences, critères de d'Alembert et de Cauchy. Exemple de calcul de RCV en exo. Trois exemples dans HAUCHECORNE 2007 pour montrer qu'on ne peut rien dire sur la convergence dans le disque fermé de convergence. Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible, application au calcul de $\sum_n \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Les fonctions holomorphes sont les fonctions développables en séries entières en guise de transition (AMAR et MATHERON 2003).

(b) *Suites de fonctions holomorphes et méromorphes* : AMAR et MATHERON 2003. Théorème de Weierstrass, exemple de la fonction $\zeta$. Théorème de Montel. Application au théorème de Cartan simplifié dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013. Produits infinis : lien entre la convergence uniforme du produit infini $\prod f_n$ et la convergence normale de $\sum(1-f_n)$. Théorème sur les zéros du produit. Exemple de la fonction $1/\zeta$. Définition du produit de Biaschke, critère pour qu'une suite soit la suite des zéros d'une fonction holomorphe bornée sur le disque unité. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, théorème de convergence des séries de fonctions méromorphes, application au prolongement de $\Gamma$.

4 **Séries de Fourier** : GOURDON 2009b. Définition des coefficients de Fourier et de la série de Fourier, lemme de Riemann-Lebesgue (référence ?), théorème de Dirichlet simplifié, théorème de convergence normale, base hilbertienne de $L^2([0, 2\pi])$, Parseval-Bessel. Application au calcul de séries. Formule sommatoire de Poisson et application au calcul d'une somme.

# 243 : Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.

**Développements** :

- Espace de Bergman
- Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible

**Références :** GOURDON 2009b, FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009b, HAUCHECORNE 2007.

**Plan :**

## 1 Définition et premières propriétés : GOURDON 2009b

(a) *Rayon de convergence* : Définition, lemme d'Abel, rayon de convergence. Critères d'Hadamard et d'Alembert. Remarque sur le fait qu'on n'a pas nécessairement convergence sur le disque fermé de convergence. Exemple de $\sum \frac{z^n}{2n+1}$. Sans référence : si $(\lambda_n)$ est une suite strictement croissante d'entiers, $\sum x^{\lambda_n}$ a pour rayon de convergence 1. FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009b : si $R$ est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$, alors $\sum a_n^2 z^n$ a pour rayon de convergence $R^2$.

(b) *Fonctions définies par des séries entières* : Exemples de $\exp, \text{ch}, \text{sh}, \sin, \cos$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

(c) *Opérations sur les séries entières* : Unicité du développement en série entière. Rayon de convergence d'une somme ou d'un produit de Cauchy : $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. Exemples de cas d'égalités : $\sum z^n + 0$ et $1 \times \sum z^n$. Exemple de cas où l'inégalité est stricte dans HAUCHECORNE 2007. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009b, développement en série entière d'une fraction rationnelle. Sans référence : développement en série entière d'une composée.

## 2 Régularité de la somme d'une série entière : GOURDON 2009b

(a) *Continuité* : la somme est continue sur le disque ouvert de convergence, exemple de $\exp, \cos, \sin$

(b) *Dérivabilité* : dérivabilité et expression de la dérivée. Les coefficients du développements en série entière sont les coefficients de Taylor. Dans ROMBALDI 2004, condition suffisante à partir de Taylor-Laplace pour être développable en série entière autour d'un point. Contre-exemple de $x \mapsto e^{-1/x^2}$ prolongée par 0 en 0. Application pour résoudre l'EDO $(1-x)^2 y'^2 = 4y$. Obtention du développement en série entière de $f$ à partir de celui de $f'$ (sans référence). Application : développement de arctan et arcsin. Dans FGN, Analyse 4, équation de Bessel.

(c) *Lien avec l'holomorphie* : AMAR et MATHERON 2003. Définition d'une fonction holomorphe, d'une fonction analytique, équivalence des deux notions si $\Omega$ est connexe ; principe des zéros isolés. Théorème de Liouville pour les séries entières, formule de la moyenne. Application (sans référence) à d'Alembert-Gauss. Inégalités de Cauchy dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, p. 46. Espaces de Bergman dans Bayer-Margaria. Egalité $\sum |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta$.

## 3 Comportement au bord du disque de convergence

(a) *Exemples de comportements* : HAUCHECORNE 2007, les trois contre-exemples pour montrer que tout peut arriver.

(b) *Points réguliers et singuliers* : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013. Définition, critère pour être un point régulier. Si tous les coefficients de la série entière de rayon de convergence 1 sont positifs, 1 est point singulier. Admis : il existe une série entière de rayon de convergence 1 qui converge uniformément sur $\overline{D(0,1)}$ mais pas normalement. Dans GOURDON 2009b, théorème d'Abel angulaire et taubérien faible.

# 245 : Fonctions holomorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.

**Développements** :

- Espace de Bergman
- Prolongement de $\Gamma$
- *Formule des compléments*

**Références :** AMAR et MATHERON 2003, TAUVEL 2006, RUDIN 1970, QUEFFÉLEC et ZUILY 2013. Secondaires : QUEFFÉLEC 1998, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005.

Il y a beaucoup de choses à dire. Faire attention aux différents points de vue sur l'analyse complexe : avec toute la théorie des formes différentielles dans AMAR et MATHERON 2003, ou dans un ouvert convexe avec le théorème de Morera dans RUDIN 1970 et TAUVEL 2006. Le principal problème dans ce plan, c'est qu'on ne dit nulle part que la dérivabilité et l'holomorphie sont en définitive la même chose.

**Plan** :

**Cadre :** $\Omega$ ouvert de $\mathbb{C}$.

## 1 Généralités : AMAR et MATHERON 2003, chapitre 3.

(a) *$\mathbb{C}$-dérivabilité et holomorphie* : définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité, stabilité par combinaison linéaire, produit, composition. Équivalence avec la différentiabilité si la différentielle est une similitude directe, remarque sur la forme de la jacobienne dans ce cas. Conditions de Cauchy-Riemann. Définition d'une fonction holomorphe : c'est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable et $\mathscr{C}^1$. Notation $\mathscr{H}(\Omega)$.

(b) *Exemples et contre-exemples*. Polynômes et fonctions rationnelles. Contre-exemple de la conjugaison complexe, de Re et Im . Définition d'une série entière, holomorphie. Exemples : exp, cos, sin. Une fonction analytique est holomorphe. Définition de la détermination principale du logarithme complexe, remarque sur le fait que $\mathrm{Log}(ab) \neq \mathrm{Log}(a)+\mathrm{Log}(b)$ en général. Holomorphie du logarithme, exemple des fonctions puissances.

## 2 Formule de Cauchy et conséquences

(a) *Formule de Cauchy* : RUDIN 1970 ou TAUVEL 2006. Définition d'un lacet, notation $\gamma^*$. Définition de l'intégrale le long d'un lacet. Rappel du théorème de Jordan (QUEFFÉLEC 1998 par exemple), admis. Formule de Cauchy sur un ouvert convexe en laissant tomber la notion d'indice et conséquence pour la dérivée $n$-ième (TAUVEL 2006). Application (sans référence) au calcul de l'intégrale de Dirichlet $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$. Formule de la moyenne.

(b) *Analyticité et holomorphie* : AMAR et MATHERON 2003. Toute fonction holomorphe est somme de sa série de Taylor sur tout disque $D(a,r) \subset \Omega$. Les fonctions holomorphes sont donc exactement les fonctions analytiques. Si $\Omega$ est connexe et $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ a toutes ses dérivées nulles en un point, alors $f$ est nulle. Principe des zéros isolés, application au prolongement de $\zeta$ à $\{\mathrm{Re}(s) > 0\} \setminus \{1\}$.

(c) *Inégalités de Cauchy* : AMAR et MATHERON 2003. Enoncé. Théorème de Weierstrass, théorème de Liouville. Application : théorème de d'Alembert-Gauss (introuvable ?). Théorème d'holomorphie sous le signe intégrale. Exemple de la fonction $\Gamma$.

(d) *Principe du maximum* : RUDIN 1970. Enoncé sur $\Omega$ ouvert connexe. Corollaire : le maximum est atteint au bord. Application : théorème de Schwarz.

## 3 Fonctions méromorphes

(a) *Singularités* : TAUVEL 2006. Définition d'une singularité isolée, singularité effaçable. Si $f$ est bornée sur un disque épointé, elle a une singularité effaçable. Alternative singularité effaçable / pôle / singularité essentielle. Exemple de $\frac{\sin z}{z}$, $\exp\left(\frac{1}{z}\right)$. Dans AMAR et MATHERON 2003, définition des séries de Laurent.

(b) *Fonctions méromorphes* : définition (TAUVEL 2006. Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, théorème de convergence normale des séries de fonctions méromorphes et prolongement de la fonction $\Gamma$. Pole simple de $\zeta$ en 1. Développement de $\frac{\pi^2 \cos \pi z}{\sin^2 \pi z}$.

(c) *Théorème des résidus* : TAUVEL 2006. Définition du résidu, énoncé du théorème. Dans AMAR et MATHERON 2003, exemples de calculs d'intégrales avec ce théorème (fraction rationnelle sans pôle réel) et formule des compléments. Si on a la place (peu probable !) : principe de l'argument et théorème de Rouché.

## 4 Topologie de $\mathscr{H}(\Omega)$

(a) *Compacité* : dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, distance de la convergence uniforme sur tout compact, théorème de Montel. Application au théorème de Cartan simplifié.

(b) *Structure hilbertienne de* $\mathbb{A}^2(\mathbb{D})$ : définition et énoncé du théorème sur les espaces de Bergman.

# 246 : Séries de Fourier. Exemples et applications.

**Développements** :

- Formule sommatoire de Poisson
- Banach-Steinhaus et séries de Fourier

**Références** : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, GOURDON 2009b. Secondaires : RUDIN 1970.

**Plan :**
**Cadre :** on note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

## 1 Coefficients de Fourier

(a) *Définition* : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013 ou GOURDON 2009b. Définition du produit scalaire sur $L^2(\mathbb{T})$, des $e_n : x \mapsto e^{inx}$ et de $c_n(f)$ ; définition de la série de Fourier ; Mentionner l'écriture sous forme $\sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ et la relation entre $a_n$, $b_n$ et $c_n$. La famille $(e_n)_n$ est orthonormée.

(b) *Propriétés des coefficients de Fourier* : Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, toutes les petites propriétés concernant les coefficients de Fourier d'un translaté, d'un conjugué, de la convolution $f \star e_n$, de la dérivée. "Unicité" de la série de Fourier : si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha_n e_n$ converge uniformément vers $f \in L^1(\mathbb{T})$, alors $\alpha_n = c_n(f)$ pour tout $n$. Lemme de Riemann-Lebesgue. On a un morphisme d'algèbres $f \mapsto (c_n(f))_n$ de $(L^1, +, \star)$ dans $c_0(\mathbb{Z})$.

(c) *Calcul de séries de Fourier* : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013. Calcul (avec dessins) des coefficients de Fourier d'un créneau, d'un triangle, de $t \mapsto e^{iat}$.

## 2 Convergence des séries de Fourier

(a) *Convergence dans $L^2$* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005 $(e_n)$ est une base hilbertienne de $L^2$, théorème de Parseval-Bessel, toute fonction $L^2$ est somme de sa série de Fourier au sens $L^2$

(b) *Les noyaux de sommations* : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013. Noyau de Dirichlet, $S_N(f) = D_N \star f$, expression explicite. Noyau de Féjer comme moyenne de Césaro de $(D_N)_N$, définition de $\sigma_N$, c'est la moyenne de Césaro des $S_N$. Expression explicite du noyau de Féjer et de $\sigma_N(f)$, c'est une identité approchée.

(c) *Résultats de convergence* : dans RUDIN 1970, Banach-Steinhaus et séries de Fourier. Dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, convergence de la somme de Féjer, application à Stone-Weierstrass et au théorème de Weierstrass. Théorème de Dirichlet, théorème de convergence normale.

## 3 Applications des séries de Fourier :

(a) *Calcul de sommes* : QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, les sommes obtenues à partir des calculs faits en première partie. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2009b, $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$. Dans GOURDON 2009b, formule sommatoire de Poisson et ses corollaires.

(b) *Lien entre la régularité de la fonction et ses coefficients de Fourier* : le théorème dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013.

# 250 : Transformation de Fourier. Applications.

**Développements** :

- Formule sommatoire de Poisson
- Inversion de Fourier

**Références** : Bony 2001, Willem 1995, Rudin 1970, Barbé et Ledoux 2007, Ouvrard 2009, Lesfari 2012, Zuily 1986

A réviser : convolution de distributions

**Plan** : On adopte la convention (celle de Bony 2001, mais pas de Willem 1995, attention) $\hat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-it\xi}\mathrm{d}t$.

## 1 Transformée de Fourier d'une fonction

(a) *Définition dans $L^1$* : dans Bony 2001, définition, $\hat{f}$ est continue, tend vers 0 à l'infini et $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \hat{f}_1$ ; transformée de Fourier d'un créneau $\mathbb{1}_{[-a,a]}$ (sans référence) ; transformée de Fourier d'une gaussienne. Rajouter d'autres exemples ! Dans Rudin 1970, les petites propriétés sur l'effet d'une translation/dilatation sur la transformée de Fourier ; contre-exemple de $x \mapsto x^2$ qui n'a pas de transformée de Fourier ; transformée de Fourier d'un produit de convolution ; $f \mapsto \hat{f}$ est un morphisme d'algèbres de $(L^1, +, \star)$ dans $(L^1, +, \times)$, qui est de plus injectif (admis) ; application : $(L^1, +, \star)$ est une algèbre non unitaire.

(b) *Espace de Schwartz* : Bony 2001. Définition, familles de semi-normes $\mathscr{N}_p$ et continuité de la transformée de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ au sens de ces semi-normes. L'espace de Schwarz est stable par convolution et par produit. Dans Queffélec et Zuily 2013, formule d'inversion de Fourier, en faisant remarquer que c'est aussi valable dans $L^1$ (admis, Rudin 1970 ou Bony 2001 avec les distributions). Dérivée $n$-ième d'une transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz. Formule de Plancherel dans l'espace de Schwartz (Willem 1995).

(c) *Extension à $L^2(\mathbb{R}^d)$* : Willem 1995. Extension de la transformée de Fourier $\mathscr{F}$ à $L^2(\mathbb{R}^d)$ par densité de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, c'est une isométrie (à un facteur près). La restriction de $\mathscr{F}$ à $L^1 \cap L^2$ est la transformée de Fourier usuelle. Formule de Plancherel dans $L^2$, application au calcul de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi x)}{\pi^2 x^2}\mathrm{d}x$ . Théorème de Shannon.

(d) *Transformée de Fourier complexe* : Rudin 1970. Définition pour $F \in L^2(\mathbb{R})$, c'est une fonction holomorphe. Si $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est telle que $\hat{f} \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, alors $f = 0$ (sans référence). Exercice pour retrouver la transformée de Fourier d'une gaussienne dans Beck, Malick et Peyré 2005, p. 83. Éventuellement, le théorème de Paley-Wiener (admis).

## 2 Transformée de Fourier d'une distribution tempérée

(a) *Distributions tempérées et convolution* : Bony 2001. Définition d'une distribution tempérée, la restriction d'une distribution tempérée à $\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ est une distribution. Exemple : si $f$ est localement intégrable et majorée par un polynôme, $f$ définit une distribution tempérée. Toute distribution à support compact est tempérée. La distribution $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\delta_k$ est tempérée si et seulement si il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}, |a_k| \leqslant C(1 + |k|)^N$. Exemple (Zuily 1986) : $\mathrm{VP}\left(\dfrac{1}{x}\right) \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Définition de la convergence dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$, si $f_j \xrightarrow{L^1} f$, alors $f_j \xrightarrow{\mathscr{S}'(\mathbb{R})} f$. Définition du produit de convolution d'une distribution à support compact et d'une fonction lisse à support compact ; d'une distribution à support compact et d'une distribution.

(b) *Transformation de Fourier dans* $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$ : BONY 2001. Définition, stabilité de $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ par transformation de Fourier (LESFARI 2012). Dérivation et transformée de Fourier. Transformée de Fourier d'un Dirac, de VP$\left(\frac{1}{x}\right)$ (ZUILY 1986). Inversion de Fourier pour les distributions tempérées. Transformée de Fourier de $x \mapsto x^a$ (LESFARI 2012). Dans GOURDON 2009b, formule sommatoire de Poisson et ses corollaires.

(c) *Liens avec la convolution* : BONY 2001. Transformée de Fourier de la convolution de deux distributions. Application à la résolution de $\Delta u = 0$ dans $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^d)$.

3 **Fonction caractéristique d'une variable aléatoire** : résumé de 261.

# 253 : Utilisation de la notion de convexité en analyse.

**Développements** :
- Ellipsoïde de John-Loewner
- Inégalité de Hoeffding

**Références** :
- Principales : Gourdon 2009b, Beck, Malick et Peyré 2005, Tauvel 2005b.
- Secondaires : Barbé et Ledoux 2007, Ouvrard 2009, Briane et Pagès 2006, Rouvière 2003, Brézis 2005.

A réviser : théorème de Lax-Milgram

## 1 Parties convexes, fonctions convexes

On se place dans un $\mathbb{R}$-ev préhilbertien $E$.

(a) *Définitions et exemples* : Dans Tauvel 2005b, définition d'une combinaison convexe et d'une partie convexe. Exemples : les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, un sev ou une boule est convexe. Un convexe est connexe par arcs, une intersection de convexes est convexe, l'adhérence d'un convexe est convexe. Dans Beck, Malick et Peyré 2005, définition d'une fonction (strictement) convexe, de l'épigraphe, caractérisation de la convexité avec l'épigraphe, définition d'une fonction concave, les fonctions affines sont convexes et concave. Dans Gourdon 2009b, inégalité $f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$.

(b) *Enveloppe convexe* : Tauvel 2005b. Définition, théorème de Lucas, l'enveloppe convexe de $A$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de $A$, l'intersection des convexes fermés contenant $A$ est l'adhérence de l'enveloppe convexe. Théorème de Carathéodory, application à la compacité de l'enveloppe convexe d'un compact.

(c) *Séparation des convexes* : Brézis 2005. Définition de la séparation par un hyperplan au sens large/strict. Forme analytique de Hahn-Banach (admis), forme géométrique (admise), application à un critère de densité d'un sev de $E$. Application (sans référence) : théorème du minimax de von Neumann en théorie des jeux.

(d) *Régularité des fonctions convexes* : Lemme des trois pentes (Gourdon 2009b). Dans Beck, Malick et Peyré 2005, une fonction convexe $f : C \to \mathbb{R}$, $C$ convexe de $\mathbb{R}^n$, est lipschitzienne sur tout compact contenu dans $\mathring{C}$, et donc continue sur $\mathring{C}$ ; critère de convexité pour une fonction différentiable sur un ouvert par la "monotonie" et contre-exemple si on n'est plus sur un ouvert ; application : $x \to \langle Ax, x\rangle$ est convexe ssi $A$ est une matrice positive. Dans Gourdon 2009b, une fonction convexe est dérivable à gauche et à droite en tout point, une fonction dérivable est convexe ssi $f'$ est croissante, une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$ est constante et contre-exemple sur $\mathbb{R}_+$.

## 2 Inégalités de convexité

(a) *Inégalités classiques* : Rombaldi 2004. Inégalités $e^x \geqslant x+1$, $\ln x \leqslant x-1$, $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$ ; inégalité arithmético-géométrique (Gourdon 2009b). Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et $u$ continue sur $[a,b]$, $f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b u(t)\mathrm{d}t\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b (f\circ u)(t)\mathrm{d}t$.

Inégalité de Young : $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour $p, q$ exposants conjugués. Inégalité de Hölder pour des sommes finies (GOURDON 2009b).

(b) *Inégalités dans les espaces $L^p$* : BRIANE et PAGÈS 2006. Inégalité de Hölder pour les intégrales, application aux relations d'inclusions entre les $L^p$. $L^p$ est un espace vectoriel normé.

(c) *Inégalités en probabilités* : Dans BARBÉ et LEDOUX 2007, inégalité de Jensen, application à $|\mathbb{E}[X]| \leqslant \mathbb{E}[|X|]$. Dans OUVRARD 2009, inégalité de Hoeffding et son corollaire, en n'oubliant pas le lemme $e^{tx} \leqslant \dfrac{1-x}{2}e^{-t} + \dfrac{1+x}{2}e^{t}$.

**3 Optimisation**

(a) *Convexité et extréma* : BECK, MALICK et PEYRÉ 2005. Les lignes de niveau d'une fonction convexes sont convexes. Un minimum local d'une fonction convexe différentiable est un minimum global. Une fonction strictement convexe admet au plus un point où le minimum global est atteint. Dans FRANCINOU, GIANELLA et NICOLAS 2008, log-concavité du déterminant et ellipsoïde de John-Loewner, application aux sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

(b) *Points fixes* : ROUVIÈRE 2003. Méthode de Newton, et application à la recherche d'une racine carré. Théorème de point fixe pour une fonction 1-lipschitzienne sur un convexe compact et contre-exemple (rotation). Théorème de Schauder (admis) : si $C$ est un convexe fermé de $E$ evn et $f : C \to C$ est continue et $f(C)$ est relativement compact, alors $f$ admet un point fixe dans $C$ (Chambert-Loir, analyse 1). Application au théorème de Cauchy-Arzela-Peano (l'énoncé est dans QUEFFÉLEC et ZUILY 2013, mais la preuve avec Schauder est de Karine Beauchard, voir le poly d'Adrien Laurent).

(c) *Théorèmes de projection* : Dans BECK, MALICK et PEYRÉ 2005, théorème de projection sur un convexe fermé, cas particulier d'un sev fermé. Dans ROUVIÈRE 2003, moindres carrés. Citer en application le théorème du supplémentaire orthogonal, théorème de Riesz...Théorème de Lax-Milgram avec son cas symétrique (BRÉZIS 2005).

# 260 : Espérance, variance et moments de variables aléatoires.

**Développements** :

- Inégalité de Hoeffding
- Théorème de Weierstrass

**Références :** BARBÉ et LEDOUX 2007, OUVRARD 2009, OUVRARD 2007.

**Plan :**
**Cadre :**on se donne $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.

## 1 Espérance d'une variable aléatoire

(a) *Définition et premières propriétés* : BARBÉ et LEDOUX 2007. Définition de l'espérance, d'une variable centrée. Linéarité de l'espérance. Théorème de transfert, remarquer qu'en conséquence $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$. Exemple : les variables aléatoires discrètes. Inégalité de Markov. Définition d'un vecteur aléatoire et de son espérance.

(b) *Espérance des lois usuelles* : OUVRARD 2007 à la fin. Espérance d'une variable aléatoire à densité. Deux tableaux avec les espérances usuelles. Contre-exemple de la loi de Cauchy qui n'a pas d'espérance.

(c) *Indépendance et espérance* : BARBÉ et LEDOUX 2007. La définition de l'indépendance d'une famille de variables aléatoires, critère d'indépendance avec l'espérance. Définition de la fonction caractéristique, caractérisation de l'indépendance par ce moyen. Inégalité de Hoeffding et critère de convergence presque sure (OUVRARD 2009).

## 2 Moments d'une variable aléatoire

(a) *Moments d'ordre p, espaces $L^p$* : Dans BRIANE et PAGÈS 2006, définition de l'espace $L^p$, du moment d'ordre $p$, de la norme $\|\cdot\|_p$. Inégalité de Hölder. Théorème de Riesz-Fischer, théorème de convergence dominée dans $L^p$ avec ses contre-exemples classiques. Dans BARBÉ et LEDOUX 2007, expression du moment d'ordre $p$ à l'aide de la fonction de répartition.

(b) *Variance et covariance* : BARBÉ et LEDOUX 2007. Définition de la variance, lien avec la norme $\|\cdot\|_2$, définition de l'écart-type. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, application au théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein. Définition de la covariance, inégalité de Cauchy-Schwarz dans ce contexte. Tableau avec les variance de quelques lois usuelles (OUVRARD 2009 à la fin). Définition de la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire, d'un vecteur gausssien. Si la matrice de covariance d'un vecteur gaussien est diagonale, alors les composantes du vecteur sont indépendantes.

(c) *Liens entre moments et fonction caractéristique* : OUVRARD 2009. Le théorème des moments, on peut donc retrouver les moments de $X$ à partir de sa fonction caractéristique. Critère d'analyticité de la fonction caractéristique. Si deux v.a. bornées ont mêmes moments à tous ordres, alors elles ont même loi.

## 3 Convergence en loi et théorèmes limites

(a) *Loi des grands nombres* : dans BARBÉ et LEDOUX 2007, définition de la convergence en probabilités, loi faible et forte (admise) des grands nombres, exemple avec la loi de Bernoulli.

(b) *Convergence en loi* : Dans BARBÉ et LEDOUX 2007, définition de la convergence en loi et caractérisation avec la fonction de répartition. Dans OUVRARD 2009, caractérisation avec les liminf, limsup. Stabilité par composition par une fonction continue. Dans BARBÉ et LEDOUX 2007, la convergence ps et la convergence en proba impliquent la convergence en loi. Théorème de Slutsky, corollaire avec les combinaisons linéaires et produits. Théorème de Scheffé (OUVRARD 2009).

(c) *Théorème central-limite* : dans BARBÉ et LEDOUX 2007, fonction caractéristique d'une loi normale. Théorème de Lévy (admis). Théorème central limite et application à la recherche d'un intervalle de confiance. Applications et raffinements (OUVRARD 2009) : Moivre-Laplace, théorème central limite poissonien, théorème des évènements rares.

# 261 : Fonction caractéristique d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

**Développements** :

- Théorème central limite
- La fonction caractéristique caractérise la loi

**Références** : BARBÉ et LEDOUX 2007, OUVRARD 2009, FOATA et FUCHS 2003, DURRETT 2010,

**Plan** : **Cadre :**$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ espace probabilisé.

## 1 Définitions et premières propriétés

(a) *Fonction caractéristique* : dans BARBÉ et LEDOUX 2007, définition et expression avec le théorème de transfert. Dans DURRETT 2010 et FOATA et FUCHS 2003, petites propriétés (FC d'une combinaison linéaire $aX + b$, continuité, caractère borné, c'est une fonction hermitique) ; si $X$ et $-X$ ont même loi, alors $\varphi_X$ est réelle, remarque sur la généralisation aux vecteurs aléatoires. Dans Grimmett-Stirzaker p. 182, théorème de Bochner (admis) donnant des conditions pour que $\varphi$ soit une fonction caractéristique.

(b) *Inversion de la fonction caractéristique* : dans DURRETT 2010, formule d'inversion de la fonction caractéristique, cas où $\varphi_X$ est intégrable, application : elle caractérise la loi. Contre-exemple : si la densité de $X$ est $x \mapsto e^{-|x|}$, $\varphi_X(t) = \dfrac{1}{1-|t|}$ et n'est pas intégrable. Exemple d'un calcul de fonction caractéristique avec l'inversion de Fourier.

(c) *Fonctions caractéristiques usuelles* : calcul dans le cas où $X$ est à densité / discrète. Tableau donnant les fonctions caractéristiques des lois usuelles (FOATA et FUCHS 2003 et éventuellement le livre de Walter Appel).

## 2 Fonction caractéristique et moments.

Dans BARBÉ et LEDOUX 2007, expression des moments de la fonction caractéristique d'une va $L^n(\Omega)$. Dans OUVRARD 2009, réciproque (admise) : si $\varphi_X$ est $n$ fois dérivable alors $X \in L^n$ ($n$ pair). Dans FOATA et FUCHS 2003, formule de Taylor-Young appliquée à la fonction caractéristique. Dans OUVRARD 2009, formule de Taylor avec reste intégral ; condition suffisante d'analyticité de la fonction caractéristique/ Dans BARBÉ et LEDOUX 2007, remarquer qu'on retrouver la fonction caractéristique d'une gaussienne ; application : si deux va bornées ont mêmes moments à tous ordre, alors elles ont même loi ; contre-exemple de deux va ayant les mêmes moments mais pas la même densité.

## 3 Fonctions caractéristiques et indépendance.

(a) *Caractérisation de l'indépendance par les fonctions caractéristiques* : BARBÉ et LEDOUX 2007. Théorème de caractérisation, application à la fonction caractéristique d'une somme de deux va indépendantes ; contre-exemple (FOATA et FUCHS 2003), remarque : le produit de deux fonctions caractéristiques est une fonction caractéristique. Vecteurs gaussiens : définition, matrice de covariance, fonction caractéristique, $(X_1, \ldots, X_d)$ est un vecteur gaussien de composantes indépendantes ssi sa matrice de covariance est diagonale.

(b) *Somme de variables aléatoires indépendantes*. Dans Barbé et Ledoux 2007, une somme de $n$ Bernoulli indépendantes est une binomiale. Dans Foata et Fuchs 2003, une somme de $n$ va de loi $\mathscr{E}(\lambda)$ est une $\Gamma(n,\lambda)$ (ça se fait avec la transformée de Laplace mais bon...), mentionner le processus de Poisson. Somme de lois de Poisson. Dans Barbé et Ledoux 2007, si $X$ et $Y$ sont indépendantes, $X+Y$ a pour loi le produit de convolution de $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$, cas à densité.

4 **Convergence en loi** :

(a) *Définition et lien avec les fonctions caractéristiques* : dans Barbé et Ledoux 2007, définition de la convergence en loi. Dans Ouvrard 2009, théorème de Lévy en deux parties : si $X_n$ tend en loi vers $X$, $\varphi_{X_n}$ converge uniformément vers $\varphi_X$ sur tout compact ; et si $\varphi_{X_n}$ converge simplement vers $\varphi$ continue en 0, alors $\varphi$ est la fonction caractéristique de $X$ et $X_n$ tend en loi vers $X$ (admis). Théorème de Poisson ; convergence d'une suite $X_n \sim \mathscr{B}(m,p_n)$ quand $p_n \to p$ ; idem avec les lois de Poisson ; lemme de Slutsky.

(b) *Théorèmes limites* : dans Barbé et Ledoux 2007, théorème central limite et application à la recherche d'un intervalle de confiance. Applications et raffinements (Ouvrard 2009) : Moivre-Laplace, théorème des évènements rares de Poisson.

# 262 : Modes de convergence d'une variable aléatoire. Exemples et applications.

**Développements** :

- Théorème central limite
- Inégalité de Hoeffding

**Références** : Barbé et Ledoux 2007, Ouvrard 2009, Durrett 2010, Briane et Pagès 2006.

**Plan** :

A réviser : uniforme intégrabilité

## 1 Convergence presque sure et convergence en probabilité

(a) *Convergence presque sure* : Dans Barbé et Ledoux 2007, définition, critère avec la limsup. Critère de Cauchy (Ouvrard 2009). Stabilité par composition avec une fonction continue, par combinaison linéaire, produit. Exemple de $\sum_{i=O}^{+\infty} 2^{-i}X_i$ quand $X_i$ suit une loi de Bernoulli. Borel-Cantelli. Dans Ouvrard 2009, contre-exemple sans l'hypothèse d'indépendance et raffinement de Borel-Cantelli : si $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_{n+1} - X_n| \geqslant \varepsilon_n) < +\infty$, alors $(X_n)$ converge p.s. Dans Barbé et Ledoux 2007, exemple de la CV p.s. de $\frac{M_n}{\ln n}$ quand $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, $X_i$ de loi exponentielle. Inégalité de Hoeffding et application.

(b) *Convergence en probabilité*. Dans Barbé et Ledoux 2007, définition, distance métrisant cette convergence, elle est impliquée par la convergence p.s. "Loi des grands nombres" pour des variables $L^2$ non corrélées centrées de même variance. Exemple de la convergence en proba de $X_n \sim \mathscr{B}(p_n)$. Contre-exemple d'une suite convergeant en proba mais pas p.s. (Ouvrard 2009). Dans Barbé et Ledoux 2007, critère de convergence en proba avec la convergence presque sûre d'une suite extraite. Stabilité de la convergence en proba par composition avec une fonction continue. La convergence p.s. n'est pas métrisable. "Critère de Cauchy" de la convergence en proba.

(c) *Loi des grands nombres* : Ouvrard 2009. Les quatre versions de la LGN, en admettant les trois dernières. Exemple d'un cas où la convergence de $\frac{S_n}{n}$ a lieu en probabilité mais pas p.s. Remarque sur la méthode de Monte-Carlo. Théorème de Glivenko-Cantelli.

## 2 Convergence dans $L^p$

Dans Briane et Pagès 2006, définition des espaces $\mathscr{L}^p$ et $L^p$. Inégalités de Holder et Minkowski. Complétude de $L^p$ avec la sous-suite qui converge. Contre-exemples : convergence dans $L^p$ mais pas ps, ps mais pas dans $L^p$. Théorème de convergence dominée. Si $q \geqslant p$, la convergence $L^q$ implique la convergence $L^p$. Dans Barbé et Ledoux 2007, définition de l'uniforme intégrabilité et caractérisation. Exemples : une famille bornée par une fonction intégrable positive. Théorème donnant l'équivalence entre convergence $L^1$ et convergence en proba. Corollaire qui suit.

## 3 Convergence en loi.

(a) *Définition* : Dans Barbé et Ledoux 2007, définition de la convergence étroite et de la convergence en loi et caractérisation avec la fonction de répartition. Dans

Ouvrard 2009, caractérisation avec les liminf, limsup. Dans Durrett 2010, des exemples : reformulation de Glivenko-Cantelli en termes de convergence en loi, problème des anniversaires. Stabilité par composition par une fonction continue. Théorème de Helly, contre-exemple qui suit, notion de suite de mesures tendue et résultat de compacité pour la convergence étroite qui suit.

(b) *Lien avec les autres modes de convergence*. Dans Barbé et Ledoux 2007, la convergence ps et la convergence en proba impliquent la convergence en loi. Théorème de Slutsky, corollaire avec les combinaisons linéaires et produits. Contre-exemple d'une suite convergeant en proba mais pas presque sûrement. Théorème de Scheffé (Ouvrard 2009).

(c) *Fonction caractéristique et théorème de Lévy* : Dans Barbé et Ledoux 2007, définition, fonction caractéristique d'une loi normale. Théorème de Lévy (admis). Théorème central limite et application à la recherche d'un intervalle de confiance. Applications et raffinements (Ouvrard 2009) : Moivre-Laplace, théorème central limite poissonien, théorème des évènements rares.

En annexe : le diagramme résumant les liens entre les différents modes de convergence.

# 263 : Variables aléatoires à densité. Exemples et applications.

**Développements** :

- Processus de Poisson
- La fonction caractéristique caractérise la loi
- *Théorème central limite*

**Références** : Ouvrard 2007, Ouvrard 2009, Barbé et Ledoux 2007, Durrett 2010, Foata et Fuchs 2004, Foata et Fuchs 2003, Cadre-Vial

**Plan** :

## 1 Variables à densité

(a) *Définition et premières propriétés* : dans Barbé et Ledoux 2007, si $\mu$ est une mesure pour laquelle $f$ est mesurable positive intégrable, $\nu : A \mapsto \int_A f \, \mathrm{d}\mu$ définit une mesure, notée $\nu = f\mu$ ; définition de l'absolue continuité, théorème de Radon-Nikodym (admis). Dans Ouvrard 2009, définition d'une v.a. à densité ; définition de la fonction de répartition, elle détermine entièrement la loi de $X$ est croissante, continue à droite en tout point. Si $X$ admet une densité, elle est dérivable en tout point de continuité de la densité $f_X$ (Ouvrard 2007). Dans Ouvrard 2009, caractérisation des v.a. à densités à l'aide de la fonction de répartition. Dans Barbé et Ledoux 2007, théorème de transfert, rajouter (sans référence) que $X$ a pour densité $f$ ssi pour toute fonction $h$ continue bornée, $\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} h(x)f(x)\mathrm{d}x$. Exemple de l'espérance et de la variance.

(b) *Lois usuelles* : dans Ouvrard 2009 et Ouvrard 2007 (pour la signification pratique de ces lois), donner les densités, espérance, variance des lois usuelles : uniforme, normale, exponentielle, Gamma, loi du chi-deux.

## 2 Calcul pratique des densités

(a) *Opérations sur les densités* : Ouvrard 2009. Densité de $T(X)$ en fonction de celle de $X$ si $T$ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme. Application au calcul de la densité de $g(U)$ si $U \sim \mathscr{N}(O, \mathrm{Id})$ et $g : (u_1, u_2) \mapsto \dfrac{u_1}{u_2}$. Définition des v.a. marginales d'un vecteur aléatoire, expression de la densité de celles-ci, application qui suit. Caractérisation de l'indépendance à l'aide du lien entre la densité de $X$ et la densité de ses marginales. Dans les exercices, simulation d'une loi normale avec $S \sim \mathscr{E}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $\Theta \sim \mathscr{U}([0, 2\pi])$ indépendantes. La densité de $X_1 + X_2$ quand $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes est $f_{X_1} \star f_{X_2}$. Application aux lois Gamma, processus de Poisson.

(b) *Fonction caractéristique et transformée de Laplace* : dans Ouvrard 2009, définition de la fonction caractéristique d'une variable aléatoire, c'est la transformée de Fourier de sa densité. Dans Durrett 2010, exemple de calcul de fonction caractéristique (loi exponentielle par exemple), inversion de la fonction caractéristique, application au calcul de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy. Dans Barbé et Ledoux 2007, lien entre moments et fonction caractéristique,

$\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$. Dans FOATA et FUCHS 2003, transformée de Laplace d'une variable aléatoire, elle caractérise la loi, permet de retrouver le résultat sur une somme de lois Gamma. Théorème de Lévy et théorème central-limite, théorème des évènements rares de Poisson.

3 **Vecteurs aléatoires gaussiens** : dans BARBÉ et LEDOUX 2007, définition, définition de la matrice de covariance, fonction caractéristique, les marginales d'un vecteur gaussien sont gausiennes mais la réciproque est fausse, donner le contre-exemple. Si $X$ est gaussien centré de matrice de covariance $A^tA$, alors il a la même loi que $AG$ où $G \sim \mathcal{N}(0,1)$. Si $X$ est gausien de marginales deux à deux non corrélées, alors $(X_1,\ldots,X_d)$ est indépendante. Dans OUVRARD 2007, si $X_1,\ldots,X_n$ sont gaussiens indépendants de loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $X_1^2+\cdots+X_n^2$ suit une loi du chi-deux à $n$ degrés de libertés. Dans Cadre-Vial, théorème de Cochran-Fischer.

# 264 : Variables aléatoires discrètes

**Développements** :
- Théorème de Weierstrass
- Processus de Poisson

**Références** : Ouvrard 2007, Barbé et Ledoux 2007, Ouvrard 2009, Foata et Fuchs 2004, Queffélec et Zuily 2013, Durrett 2010.

**Plan** :

## 1 Espaces probabilisés discrets

(a) *Espaces probabilisés, lois et variables discrètes* : Ouvrard 2007. Définition d'un espace probabilisable discret, une probabilité sur un tel espace $\Omega$ est déterminée par les $\mathbb{P}(\{\omega\}), \omega \in \Omega$. Définition d'un germe, lien entre les germes et les probabilités sur $\Omega$ discret. Définition d'une variable aléatoire discrète

(b) *Lois discrètes usuelles* : Ouvrard 2007. Définition de la loi uniforme, de la loi de Bernoulli (lancer de dés), de la loi binômiale, de la loi géométrique. Définition de la loi de Poisson et illustration par le processus de Poisson (Foata et Fuchs 2004). Donner la probabilité qu'en tirant $n$ jetons avec remise, aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois, application au paradoxe des anniversaires (Durrett 2010). Loi hypergéométrique, qui peut modéliser la probabilité d'obtenir $k$ poissons malades en en tirant $n$.

(c) *Espérance, variance* : Ouvrard 2007. Définition de l'espérance d'une va discrète, exemple d'une va constante. Une va bornée admet une espérance. Si $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k^2}\frac{6}{\pi^2}$, $X$ n'est pas bornée mais admet une espérance. Théorème de transfert. Définition de la variance. Tableau avec les espérances et variances des lois usuelles.

## 2 Variables aléatoires discrètes indépendantes

(a) *Indépendance* : Ouvrard 2007. Définition, une famille mutuellement indépendante a des composantes deux à deux indépendantes.

(b) *Construction de variables de Bernoulli indépendantes* : dans Ouvrard 2009.

(c) *Somme de variables discrètes indépendantes* : dans Ouvrard 2007, loi d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes. Définition de la fonction caractéristique, quelques exemples (loi géométrique, loi de Poisson...), une somme de deux lois de Poisson est une loi de Poisson. Une somme de $n$ Bernoulli de même paramètre indépendantes est une loi binômiale. Théorème de Weierstrass par les polynômes de Bernstein.

## 3 Théorèmes limites

(a) *Approximation de la loi de Poisson* : dans Barbé et Ledoux 2007, définition de la convergence en loi, pour des v.a. discrètes, $X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X$ équivaut à $\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Dans Ouvrard 2009, théorème de Lévy, théorème central limite poissonien et théorème des évènements rares de Poissons.

(b) *Loi des grands nombres et TCL* : dans Barbé et Ledoux 2007, la loi forte des grands nombres (admise), application à une suite iid de variables de Bernoulli ; théorème central limite, théorème de Moivre-Laplace, application aux intervalles de confiance pour un sondage.

**233** Méthodes itératives en analyse numérique matricielle.

- Méthodes itératives de résolution d'un système linéaire
- Méthode de gradient conjugué

# Bibliographie


AIGNER, Martin et Günter M. ZIEGLER (2013). *Raisonnements divins : Quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*. Springer Paris.

ALLAIRE, Grégoire (2005). *Analyse numérique et optimisation*. Editions de l'Ecole Polytechnique.

AMAR, Eric et Etienne MATHERON (2003). *Analyse complexe*. Cassini.

AUDIN, Michèle (2006). *Géométrie*. EDP Sciences.

BARBÉ, Philippe et Michel LEDOUX (2007). *Probabilité*. EDP Sciences.

BECK, Vincent, Jérome MALICK et Gabriel PEYRÉ (2005). *Objectif agrégation*. 2e éd. H et K.

BERHUY, Grégory (2012). *Modules : théorie, pratique...Et un peu d'arithmétique !* Calvage et Mounet.

BONY, Jean-Michel (2001). *Cours d'analyse - Théorie des distributions et analyse de Fourier*. Ellipses.

BRÉZIS, Haim (2005). *Analyse fonctionnelle*. Dunod.

BRIANE, Marc et Gilles PAGÈS (2006). *Théorie de l'intégration : cours et exercices*. 4e éd. Vuibert.

CALAIS, Josette (1998). *Eléments de théorie des groupes*. 2e éd. Presses universitaires de France.

CALDERO, Philippe et Jérome GERMONI (2013). *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*. T. 1. Calvage et Mounet.

— (2015). *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*. T. 2. Calvage et Mounet.

CARTAN, Henri (1967). *Calcul différentiel*. Hermann.

CIARLET, Philippe (1988). *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*. Masson.

COLMEZ, Pierre (2011). *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*. Ecole Polytechnique.

COMBES, François (1998). *Algèbre et géométrie*. Bréal.

CORMEN, Thomas et al. (2010). *Algorithmique*. 3e éd. Dunod.

DE BIASI, Jean (1998). *Mathématiques pour le CAPES et l'agrégation interne*. Ellipses.

DE SEGUINS PAZZIS, Clément (2011). *Invitation aux formes quadratiques*. Calvage et Mounet.

DEMAILLY, Jean-Pierre (2006). *Analyse numérique et équations différentielles*. EDP Sciences.

DEMAZURE, Michel (2008). *Cours d'algèbre*. Cassini.

DOLECKI, Szymon (2011). *Analyse fondamentale*. Hermann.

DURRETT, Rick (2010). *Probability : Theory and Examples*. 4e éd. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press.

DUVERNEY, Daniel (2007). *Théorie des nombres*. 2e éd. Dunod.

EL AMRANI, Mohammed (2011). *Suites et séries numériques, suites et séries de fonctions*. Ellipses.

FOATA, Dominique et Aimé FUCHS (2003). *Calcul des probabilités*. Dunod.

— (2004). *Processus stochastiques : processus de Poisson, chaînes de Markov et martingales*. Dunod.

FRANCINOU, Serge, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS (2007a). *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS : Algèbre 1*. Cassini.

FRANCINOU, Serge, Hervé GIANELLA et Serge NICOLAS (2007b). *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS : Analyse 1*. Cassini.

— (2008). *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS : Algèbre 3*. Cassini.

— (2009a). *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS : Algèbre 2*. Cassini.

— (2009b). *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS : Analyse 2*. Cassini.

— (2009c). *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS : Analyse 4*. Cassini.

GOBLOT, Rémi (2001). *Algèbre commutative*. 2e éd. Dunod.

GONNORD, Rémi et Nicolas TOSEL (1998). *Thèmes d'analyse pour l'agrégation : calcul différentiel*. Ellipses.

GOURDON, Xavier (2009a). *Les maths en tête : algèbre*. 2e éd. Ellipses.

— (2009b). *Les maths en tête : analyse*. 2e éd. Ellipses.

GOZARD, Yvan (1997). *Théorie de Galois*. Ellipses.

GRIFONE, Joseph (2011). *Algèbre linéaire*. 4e éd. Editions Cépaduès.

HAUCHECORNE, Bertrand (2007). *Les contre-exemples en mathématique*. Ellipses.

HIRIART-URRUTY, Jean-Baptiste et Claude LEMARÉCHAL (1993). *Convex Analysis and Minimization Algorithms I : Fundamentals*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 305. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

HIRSCH, Francis et Gilles LACOMBE (2009). *Analyse fonctionnelle*. Dunod.

JEANNERET, Alain et Daniel LINES (2008). *Invitation à l'algèbre*. Editions Cépaduès.

LAFONTAINE, Jacques (1997). *Introduction aux variétés différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble.

LESFARI, Ahmed (2012). *Distributions, analyse de Fourier et transformation de Laplace*. Ellipses.

MANSUY, Roger et Rached MNEIMNÉ (2012). *Réduction des endomorphismes*. Vuibert.

MERCIER, Dany-Jack (2008). *Cours de géométrie, préparation au CAPES et à l'agrégation*.

MÉRINDOL, Jean-Yves (2006). *Nombres et algèbre*. EDP Sciences.

MNEIMNÉ, Rached et Frédéric TESTARD (1986). *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann.

NOURDIN, Ivan (2006). *Agrégation de mathématiques, épreuve orale. 68 thèmes pour se préparer efficacement*. Dunod.

OUVRARD, Jean-Yves (2007). *Probabilités (Licence CAPES)*. T. 1. Cassini.

— (2009). *Probabilités (Master Agrégation)*. T. 2. Cassini.

PERRIN, Daniel (1996). *Cours d'algèbre*. Ellipses.

PEYRÉ, Gabriel (2004). *L'algèbre discrète de la transformée de Fourier*. Ellipses.

POMMELLET, Alain (1997). *Cours d'Analyse*. Ellipses.

QUARTERONI, Alfio, Ricardo SACCO et Fausto SALERI (2007). *Méthodes numériques : Algorithmes, analyse et applications*. Springer.

QUEFFÉLEC, Hervé (1998). *Topologie*. Dunod.

QUEFFÉLEC, Hervé et Claude ZUILY (2013). *Analyse pour l'agrégation*. 4e éd. Dunod.

RAMIS, Edouard, Claude DESCHAMPS et Jacques ODOUX (1990). *Cours de mathématiques spéciales*. T. 1. Dunod.

— (1995). *Cours de mathématiques spéciales*. T. 3. Dunod.

RISLER, Jean-Jacques et Pascal BOYER (2006). *Algèbre pour la licence 3. Groupes, anneaux, corps.* Dunod.

ROMBALDI, Jean-Etienne (2004). *Eléments d'analyse pour le Capes et l'Agrégation de Mathématiques*. EDP Sciences.

ROUVIÈRE, François (2003). *Petit guide de calcul différentiel*. 2e éd. Cassini.

RUDIN, Walter (1970). *Real and complex analysis*. 3e éd. McGraw-Hill series in higher mathematics. ; International student edition. McGraw-Hill.

SAINT-RAYMOND, Jean (2008). *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*. Calvage et Mounet.

SAMUEL, Pierre (1967). *Théorie algébrique des nombres*. Hermann.
SERRE, Jean-Pierre (1998). *Représentations linéaires des groupes finis*. 5e éd. Hermann.
SZPIRGLAS, Aviva (2009). *Mathématiques L3*. Pearson Education.
TAUVEL, Patrice (2005a). *Algèbre*. 2e éd. Dunod.
— (2005b). *Géométrie*. 2e éd. Dunod.
— (2006). *Analyse complexe pour la Licence 3*. Dunod.
— (2008). *Corps commutatifs et théorie de Galois*. Calvage et Mounet.
TENENBAUM, Gerald (2015). *Introduction à la théorie probabiliste et analytique des nombres*. 4e éd. Belin.
ULMER, Felix (2012). *Théorie des groupes*. Ellipses.
WILLEM, Michel (1995). *Analyse harmonique réelle*. Hermann.
ZAVIDOVIQUE, Maxime (2013). *Un max de maths*. Calvage et Mounet.
ZUILY, Claude (1986). *Distributions et équations aux dérivées partielles*. Hermann.