Théorème de Liapounov

Leçons : 220, 221

Définition 1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$.

- *Un point d'équilibre stable attractif du système $y' = f(y)$ est $y_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(y_0) = 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute solution y du système, $\|y(0) - y_0\| \leqslant \delta \Rightarrow \forall t \geqslant 0, \|y(t) - y_0\| \leqslant \varepsilon$.*
- *Le point d'équilibre attractif stable y_0 est dit asymptotiquement stable s'il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour toute solution y du système vérifiant $\|y(0) - y_0\| \leqslant \delta_0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = y(0)$.*

Théorème 2

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. Si $A = Df(0)$ a des valeurs propres de parties réelles dans $\mathbb{R}_-^*$, alors l'origine est un point d'équilibre attractif asymptotiquement stable du système $y' = f(y)$. Précisément, il existe $\beta > 0, \eta > 0, C > 0$ tels que pour tout $\|x\| < \eta$, la solution y_x de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$ vérifie

$$\forall t \geqslant 0, \|y_x(t)\| \leqslant Ce^{-\beta t}\|x\|.$$

Démonstration. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ définissant la norme $\|\cdot\|$.

On procède en trois temps :

Étape 1 : Étude du système linéarisé $\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = x \end{cases}$

On sait que la solution z de ce système est $z : t \mapsto e^{tA}x$. Par le lemme des noyaux, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus\limits_{i=1}^{l} \ker(A - \lambda_i I)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont les valeurs propres de A de multiplicité α_i. Écrivons $x = x_i + \cdots + x_l$ selon cette décomposition en somme directe. On a

$$e^{tA}x_i = e^{t\lambda_i}e^{t(A-\lambda_i I)}x_i = e^{t\lambda_i}\sum_{j=0}^{\alpha_i - 1}\frac{(A-\lambda_i I)^j}{j!}x_i = e^{t\lambda_i}P_i(A)x_i$$

où $P_i \in \mathbb{C}[X]$. Ainsi, comme $\|x_i\| \leqslant \|x\|$, on a $\|e^{tA}x_i\| \leqslant e^{t\mathrm{Re}\lambda_i}\|P_i(A)\|\|x\|$, d'où par inégalité triangulaire,

$$\forall t \geqslant 0, \|z(t)\| \leqslant \tilde{C}\left(\sum_{i=0}^{k} e^{t\mathrm{Re}\lambda_i}\right)\|x\|$$

où $\tilde{C}$ est une constante.

Donc comme les $\mathrm{Re}(\lambda_i)$ sont strictement négatifs, on peut fixer $a > 0$ et une constante $C > 0$ tels que $\forall t \geqslant 0, \|z(t)\| \leqslant Ce^{-at}\|x\|$: l'origine est un point d'équilibre attractif du système linéarisé.

Étape 2 : Introduction d'une norme auxiliaire

Soit $b : (x, y) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}y\rangle \mathrm{d}t$. La forme bilinéaire symétrique b est bien définie car, en vertu du premier point,

$$\forall (x,y), |b(x,y)| \leqslant C\left(\int_0^{+\infty} e^{-2at}\mathrm{d}t\right)\|x\|\|y\|.$$

Elle est de plus définie positive car $\langle\cdot,\cdot\rangle$ l'est et e^{tA} est inversible pour $t \geqslant 0$.

Soit y la solution de $\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = x \end{cases}$ On note $r(y) = f(y) - Ay$. On cherche à obtenir une inégalité du type $q(y)'(t) \leqslant -\beta q(y)$. On a

$$\forall t \geqslant 0, (q\circ y)'(t) = (\nabla q)(y(t)).y'(t) = 2b(y(t), f(y(t))) = 2b(y(t), r(y(t))) + 2b(y(t), Ay(t))$$

où $r(y) = f(y) - Ay$. Or, si $x \in \mathbb{R}^n$,

$$2b(x, Ax) = 2\int_0^{+\infty} \langle e^{tA}x, e^{tA}Ax\rangle \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|e^{tA}x\|^2\right)\mathrm{d}t = -\|x\|^2.$$

La norme $\sqrt{q}$ est équivalente à $\|\cdot\|$ donc on peut fixer $\beta_1 > 0$ tel que $\sqrt{q} \geqslant \beta_1\|\cdot\|$. En outre, par Cauchy-Schwarz, $|b(y, r(y))| \leqslant \sqrt{q(y)}\sqrt{q(r(y))}$. La fonction f étant $\mathscr{C}^1$, on a $r(u) = o(u)$, ce qui implique qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\sqrt{q(y)} \leqslant \sqrt{\eta} \Rightarrow \sqrt{q(r(y))} \leqslant \sqrt{\beta_1^2 2}\sqrt{q(y)}.$$

Donc en combinant ces deux résultats, si $q(y) \leqslant \eta$,

$$(q\circ y)' \leqslant -\|y\|^2 + \frac{\beta_1^2}{2}q(y) \leqslant -\frac{\beta_1^2}{2}q(y) = -\beta q(y).$$

Étape 3 : Résolution d'une inéquation différentielle.

Supposons que $q(x) \leqslant \eta$, alors $\forall t \geqslant 0, q(y(t)) \leqslant \eta$. En effet, dans le cas contraire, on peut fixer, par continuité de $q(y)$, $t_0 > 0$ tel que $q(y(t_0)) = \eta$ et $\forall t < t_0, q(y(t)) < \eta$. Alors

$$(q\circ y)'(t_0) \leqslant -\beta q(y)(t_0) < 0,$$

donc pour $t < t_0$ proche de t_0, on $q(y)(t) > q(y)(t_0) = \eta$ ce qui est contradictoire.

Soit $\psi : t \mapsto e^{\beta t}q(y(t))$. Alors

$$\forall t \geqslant 0, \psi'(t) = e^{\beta t}(\beta q(y)(t) - (q\circ y)'(t)) \leqslant 0$$

donc $\psi(t) \leqslant \psi(0) = q(x)$.

On en conclut que si $q(x) \leqslant \eta$, on a $\forall t \geqslant 0, q(y) \leqslant q(x)e^{-\beta t}$, ce qui prouve que l'origine est un point d'équilibre attractif asymptotiquement stable du système. □

Remarque.
- L'étude du système linéarisé intervient de manière cruciale pour pouvoir définir b.
- Si $Df(0)$ a une valeur propre de partie réelle strictement positive, alors 0 est un point d'équilibre instable.

Référence : François ROUVIÈRE (2003). *Petit guide de calcul différentiel*. 2e éd. Cassini, pp. 129–135