Inversion de la fonction caractéristique

Leçons : 261, 263

Théorème 1

Soit μ mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et $\varphi : t \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \mathrm{d}\mu(x)$ sa fonction caractéristique. Alors si $a < b$,

$$\mu(]a,b[) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) = \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Soit, pour $T > 0$,

$$I_T = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t) \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} \mathrm{d}\mu(x) \right) \mathrm{d}t.$$

En remarquant que $\forall t, \left| \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} e^{itx} \right| = \left| \int_a^b e^{-ity} \mathrm{d}y \right| \leqslant b - a$, on voit que le théorème de Fubini est applicable. De plus,

$$\overline{I_T} = \int_{-T}^{T} \frac{e^{ita} - e^{itb}}{-it} \varphi(-t) \mathrm{d}t = \int_{-T}^{T} \frac{e^{-iua} - e^{-iub}}{iu} \varphi(u) \mathrm{d}t = I_T$$

par un changement de variable $u = -t$, donc $I_T \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$I_T = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-a))}{t} \mathrm{d}t - \int_{-T}^{T} \frac{\sin(t(x-b))}{t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} R(x-a,T) - R(x-b,T) \mathrm{d}\mu(x).$$

où $R(\theta, T) = \int_{-T}^{T} \frac{\sin(\theta t)}{t} \mathrm{d}t$. Mais si $\theta > 0$,

$$R(\theta, T) = 2 \int_0^T \frac{\sin(\theta t)}{t} \mathrm{d}t = 2 \int_0^{\theta T} \frac{\sin(x)}{x} \mathrm{d}x = 2S(\theta T),$$

où $S(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}$. Si $\theta < 0$, $R(\theta, T) = -R(|\theta|, T)$ donc dans tous les cas, $R(\theta, T) = 2(\mathrm{sgn}\theta) S(|\theta| T)$.

Or, $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$ donc $R(\theta, T) \xrightarrow[T\to+\infty]{} \pi(\mathrm{sgn}\theta)$ donc à x fixé,

$$R(x-a,T) - R(x-b,T) \xrightarrow[T\to+\infty]{} \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \text{ ou } x > b \\ 2\pi \text{ si } a < x < b \\ \pi \text{ si } x = a \text{ ou } x = b \end{cases}.$$

De plus, $\forall \theta, T, R(\theta, T) \leqslant 2 \sup_{y \in R_+} S(y) < +\infty$ car S admet une limite à l'infini et est continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc par convergence dominée, $\frac{1}{2\pi} I_T \xrightarrow[T\to+\infty]{} \mu(]a,b[) + \frac{1}{2}\mu(\{a,b\})$. □

Corollaire 2

Si de plus $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|\mathrm{d}t < +\infty$*, alors* μ *est une mesure à densité par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité* $f : y \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ity}\varphi(t)\mathrm{d}t$*.*

Démonstration. Sous cette hypothèse, si $a < b$, $t \mapsto \varphi(t)\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it} \in L^1(\mathbb{R})$. Donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\varphi(t)\mathrm{d}t = \mu(]a,b[)+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) \leqslant \frac{b-a}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|\varphi(t)|\mathrm{d}t.$$

En particulier, $\mu(]a,b[)+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) \xrightarrow[b\to a]{} 0$. Or, si $\mu(\{a\}) > 0$, on aurait $\forall b > a, \mu(]a,b[)+\frac{1}{2}\mu(\{a,b\}) \geqslant \frac{1}{2}\mu(\{a\}) > 0$ ce qui est absurde. Donc $\mu(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

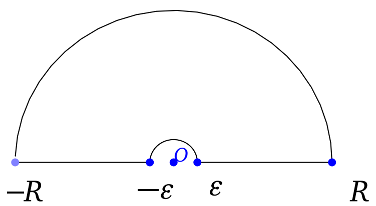
Par suite, si $x \in \mathbb{R}, h > 0$,

$$\begin{aligned}\mu(]x,x+h[) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-itx}-e^{-it(x+h)}}{it}\varphi(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_x^{x+h} e^{-ity}\mathrm{d}y\right)\varphi(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_x^{x+h}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-ity}\varphi(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

en utilisant le théorème de Fubini. Donc comme $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ est engendré par la classe stable par intersection finie $\left\{]x,x+h[,(x,h)\in\mathbb{R}^2\right\}$, par le théorème de classe monotone, on en déduit que μ a la densité annoncée par rapport à la mesure de Lebesgue. □

Remarque.

- La démonstration repose sur le fait que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ (intégrale de Dirichlet), ce qui est loin d'être évident. Le fait que cette intégrale impropre converge est élémentaire : il suffit de faire une intégration par parties. Pour sa valeur, il y a un bon nombre de preuves différentes, dont un calcul par la transformée de Laplace (dans GOURDON 2009), une astuce pour se ramener au calcul de $\int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\mathrm{d}x$, ou bien une preuve par la formule de Cauchy qui est particulièrement élégante.



Soit $f : z \mapsto \frac{e^{iz}}{z}$ holomorphe. Sur le contour dessiné, on a

$$0 = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(t)\mathrm{d}t + \int_{\varepsilon}^{R} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} f(\varepsilon e^{i\theta})\times(i\varepsilon e^{i\theta})\mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta}\times(iRe^{i\theta})\mathrm{d}\theta.$$

Comme cos est paire, on voit que la somme des deux premiers termes vaut $i \int_{\varepsilon \leqslant |t| \leqslant R} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.
Par ailleurs, l'intégrande du troisième terme est $i \exp(i\varepsilon e^{i\theta})$ qui converge simplement vers 1 et est de module $\exp(-\varepsilon \sin\theta) \leqslant 1$ donc par convergence dominée, l'intégrale tend vers $i\pi$ quand ε tend vers 0.
De la même manière, le quatrième terme tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$.
Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ est bien définie et vaut π.

- On peut montrer avec des arguments analogues à ceux du théorème que si $a \in \mathbb{R}$, $\mu(\{a\}) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{-ita} \varphi(t) \mathrm{d}t$. Ainsi, comme les intervalles de la forme $]a, b[$ constituent une classe stable par intersection finie, une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ est entièrement déterminée par sa fonction caractéristique.
- Si X est une variable aléatoire telle que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi_X(t) \in \mathbb{R}$, alors X et $-X$ ont la même loi.
- Si $X_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ et X_1 et X_2 sont indépendants, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Référence : DURRETT 2010, p. 105