# Inversion de Fourier dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$

**Leçons : 236, 239, 250**

**Théorème 1**

*Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ alors $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \hat{\hat{f}}(x) = 2\pi f(-x)$.*

**Démonstration.** L'idée phare de la preuve est d'approcher pour $x$ donné $\hat{\hat{f}}(x)$ en multipliant par une fonction gaussienne $t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}$. Soit donc $f_\varepsilon : t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)e^{itx}$.

**Étape 1** : par convergence dominée, on remarque que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t)e^{itx}\mathrm{d}t$

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)e^{itx} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \hat{f}(t)e^{itx}$ ; de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|f_\varepsilon(t)| \leqslant \left|\hat{f}(t)\right|$, et $\hat{f}$ est intégrable car dans l'espace de Schwartz.

**Étape 2** : montrons que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 2\pi f(x)$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}\hat{f}(t)e^{itx}\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{-itu}e^{itx}e^{-\varepsilon t^2}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\\ &\overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(u)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{it(x-u)}e^{-\varepsilon t^2}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}} f(u)\hat{g}_\varepsilon(x-u)\mathrm{d}u\end{aligned}$$

où $g_\varepsilon : t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}$. L'interversion par le théorème de Fubini est justifiée par le fait que $f$ et $g_\varepsilon$ sont intégrables.

Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, on a

$$\forall v \in \mathbb{R}, \hat{g}_\varepsilon'(v) = \int_{\mathbb{R}} (-it)e^{-\varepsilon t^2}e^{-itv}\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{i}{2\varepsilon}e^{-\varepsilon t^2}e^{-itv}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{i}{2\varepsilon}e^{-\varepsilon t^2}\times(-iv)e^{-itv}\mathrm{d}t = \frac{-v}{2\varepsilon}\hat{g}_\varepsilon(v).$$

De plus,

$$\hat{g}_\varepsilon(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\varepsilon t^2}\mathrm{d}t \overset{\tau=\sqrt{\varepsilon}t}{=} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t &= \int_{\mathbb{R}} f(u)\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-(x-u)^2}4\varepsilon\mathrm{d}u\\ &\overset{v=(u-x)/(2\sqrt{\varepsilon})}{=} \int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\varepsilon}v)\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}e^{-v^2}2\sqrt{\varepsilon}\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}} f(x+2\sqrt{\varepsilon}v)2\sqrt{\pi}e^{-v^2}\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Par convergence dominée, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} f_\varepsilon(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f(x)2\sqrt{\pi}e^{-v^2}\mathrm{d}v = 2\pi f(x).$$

L'hypothèse de domination est bien vérifiée car $f$ est bornée comme tout élément de l'espace de Schwartz donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall v \in \mathbb{R}, |f(x+2\sqrt{\varepsilon}v)|2\sqrt{\pi}e^{-v^2} \leqslant \|f\|_\infty 2\sqrt{\pi}e^{-v^2},$$

de sorte que l'intégrande est dominée par une gaussienne intégrable.

□

**Remarque.** Le développement est probablement un peu court, on a le temps de détailler les convergences dominées / Fubini effectuées. On peut justifier que $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ pour terminer, ou bien, spécialement dans la leçon 236, donner un exemple d'utilisation de cette formule pour un calcul d'intégrales.

**Référence :** Hervé QUEFFÉLEC et Claude ZUILY (2013). *Analyse pour l'agrégation*. 4e éd. Dunod, pp. 330-331