Formule sommatoire de Poisson

Leçons : *241*, 246, 250

Théorème 1

Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, et $\hat{f} : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2i\pi tx}\mathrm{d}t$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n).$$

Démonstration. Soit $G : x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)$.

- G **est continue** : en effet, soit $M > 0$ tel que $|f(x)| \leqslant \frac{M}{x^2}$ pour $|x| \geqslant 1$. Alors si $K > 0$, et $x \in [-K, K]$, on a pour tout $|n| \geqslant K$,

$$|f(x+n)| \leqslant \frac{M}{(x+n)^2} \leqslant \frac{M}{(|n|-|x|)^2} \leqslant \frac{M}{(|n|-K)^2},$$

  qui est le terme général positif d'une série convergente. Donc G est la somme d'une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment, donc est continue.
- G **est** $\mathscr{C}^1$: en répétant ce raisonnement, on voit que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f'(x+n)$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$ donc le théorème de dérivation terme à terme nous assure que G est $\mathscr{C}^1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, G'(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f'(x+n)$
- G **est 1-périodique** : si $x \in \mathbb{R}$, $G(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n+1) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} f(x+p)$ par un changement d'indice $p = n+1$, soit $G(x+1) = G(x)$.

La fonction G vérifiant les conditions du théorème de convergence normale des séries de Fourier (continue périodique et $\mathscr{C}^1$ par morceaux), elle est somme de sa série de Fourier sur $\mathbb{R}$.

Mais si $n \in \mathbb{Z}$, le n-ième coefficient de Fourier de G est

$$\begin{aligned}
c_n(G) = \int_0^1 G(x)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{CV normale}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^1 f(x+n)e^{-2i\pi nx}\mathrm{d}x \right) \\
&\overset{u=x+n}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} f(u)e^{-2i\pi nu}\mathrm{d}u \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2i\pi nu}\mathrm{d}u = \hat{f}(n).
\end{aligned}$$

En d'autres termes, $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)e^{2i\pi nx}$. □

Proposition 2

Si $s > 0$,
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 s} = \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2/s}.$$

Démonstration. Soit $\alpha > 0$ et $f : x \mapsto e^{-\alpha x^2}$. Si $n \in \mathbb{Z}$,
$$\hat{f}(n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} e^{-2i\pi n t} \mathrm{d}t \overset{u=\sqrt{\alpha}t}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} e^{-2i\pi n u/\sqrt{\alpha}} \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{2\pi n}{\sqrt{\alpha}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\pi^2 n^2/\alpha}$$
(transformée de Fourier d'une gaussienne). Donc par la formule de Poisson,
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{\pi} \alpha e^{-\pi^2 n^2/\alpha} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha n^2}.$$
En posant $s = \dfrac{\pi}{\alpha}$, on obtient le résultat désiré. □

Proposition 3

La distribution tempérée $\delta_{\mathbb{Z}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta_n$ est invariante par transformation de Fourier.

Démonstration. Cette distribution est bien définie car si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, $\langle \delta_{\mathbb{Z}}, f \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k)$ qui est une série convergente selon la formule de Poisson.

Elle est tempérée car si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |f(k)| \leqslant \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2} \|(1+x^2)f\|_\infty = C(\|f\|_\infty + \|x^2 f\|_\infty,$$
avec C constante. Enfin,
$$\langle \hat{\delta_{\mathbb{Z}}}, f \rangle = \langle \delta_{\mathbb{Z}}, \hat{f} \rangle = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) \overset{\text{Poisson}}{=} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = \langle \delta_{\mathbb{Z}}, f \rangle,$$
donc $\hat{\delta_{\mathbb{Z}}} = \delta_{\mathbb{Z}}$. □

Remarque.
- Il faut se souvenir de la transformée de Fourier d'une gaussienne (cf « Inversion de Fourier ») :
- La deuxième application est plutôt pour la leçon 250 qui inclut la transformation de Fourier des distributions.
- La distribution $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta_k$ est tempérée si et seulement si il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}, |a_k| \leqslant C(1+|k|)^N$ (BONY 2001, p. 171).
- On peut déduire de la deuxième application la formule d'inversion de Fourier, c'est dans LESFARI 2012.

Références :

- Xavier GOURDON (2009). *Les maths en tête : analyse*. 2e éd. Ellipses, p. 277 pour le théorème et la première application.
- Michel WILLEM (1995). *Analyse harmonique réelle*. Hermann p. 149 pour la deuxième application.