Étude de $O(p,q)$

Leçons : 106, 150, 156, *158*, *170*, 171

Prérequis : $\exp : \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme, et décomposition polaire.

Définition 1

Le groupe orthogonal de la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ représentée dans la base canonique par la matrice $I_{p,q} = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$, où $p+q=n$ est noté $O(p,q)$.

Théorème 2

On a un homéomorphisme $O(p,q) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$.

Démonstration. Étape 1 : obtention d'un homéomorphisme $O(p,q) \simeq (O_n(\mathbb{R}) \cap O(p,q)) \times (S_n^{++}(R) \cap O(p,q))$.

D'abord, $O(p,q)$ est stable par transposition :

$$M \in O(p,q) \Leftrightarrow M I_{p,q} {}^tM = I_{p,q} \Leftrightarrow M^{-1} = I_{p,q} {}^tM I_{p,q}^{-1} = I_{p,q} {}^tM I_{p,q}$$
$$\Leftrightarrow {}^t M^{-1} = I_{p,q} M I_{p,q} \Leftrightarrow {}^tM \in O(p,q).$$

Soit $M \in O(p,q)$, de décomposition polaire $M = OS, O \in O_n(R), S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a $S^2 = {}^tMM = T \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit donc $U \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $T = \exp(U)$. Selon ce qui précède, on a de plus $T \in O(p,q)$. Or,

$$\begin{aligned}
T \in O(p,q) &\Leftrightarrow \exp(U) I_{p,q} \exp({}^tU) = I_{p,q} \\
&\Leftrightarrow \exp({}^tU) = I_{p,q} \exp(-U) I_{p,q} = \exp(-I_{p,q} U I_{p,q}) \\
&\Leftrightarrow {}^tU = U = -I_{p,q} U I_{p,q} \Leftrightarrow \frac{U}{2} I_{p,q} + I_{p,q} \frac{U}{2} = 0 \\
&\Leftrightarrow {}^t \exp\left(\frac{U}{2}\right) = I_{p,q} \exp\left(\frac{U}{2}\right)^{-1} I_{p,q} \Leftrightarrow \exp\left(\frac{U}{2}\right) \in O(p,q).
\end{aligned}$$

Mais $\exp\left(\frac{U}{2}\right)^2 = T$ donc par unicité de la décomposition polaire, $S = \exp\left(\frac{U}{2}\right)$, de sorte que $S \in O(p,q)$. Ainsi, cette décomposition fournit un homéomorphisme

$$O(p,q) \simeq (O_n(\mathbb{R}) \cap O(p,q)) \times (S_n^{++}(R) \cap O(p,q)).$$

Étape 2 : description de $O_n(\mathbb{R}) \cap O(p,q)$.

Soit $O = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R}) \cap O(p,q)$, où $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}), D \in \mathscr{M}_q(\mathbb{R})$. On a

$${}^tO I_{p,q} O = \begin{pmatrix} {}^tA & {}^tC \\ {}^tB & {}^tD \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tAA - {}^tCC & {}^tAB - {}^tCD \\ {}^tBA - {}^tDC & {}^tBB - {}^tDD \end{pmatrix} = I_{p,q}$$

donc en particulier $\begin{cases} {}^tAA - {}^tCC = I_p \\ {}^tBB - {}^tDD = -I_q \end{cases}$

De plus, $I_n = {}^tOO = \begin{pmatrix} {}^tAA + {}^tCC & {}^tAB + {}^tCD \\ {}^tBA + {}^tDC & {}^tBB + {}^tDD \end{pmatrix}$ donc en combinant les deux résultats, on a ${}^tAA = I_p, {}^tCC = 0, {}^tBB = 0$ et ${}^tDD = I_q$ donc $A \in O_p(\mathbb{R})$, $D \in O_q(\mathbb{R})$ et comme $X \mapsto$

$\mathrm{Tr}({}^tXX)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $C=0$ et $B=0$. Ainsi, on a un homéomorphisme $O_n(\mathbb{R}) \cap O(p,q) \simeq O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R})$.

Étape 3 : description de $S_n^{++}(R) \cap O(p,q)$.

En réutilisant les calculs de la première partie, exp est un homéomorphisme entre $L \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(R) \cap O(p,q)$ où $L = \left\{U \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) : UI_{p,q} + I_{p,q}U = 0\right\}$.

Soit $U = \begin{pmatrix} A & B \\ {}^tB & C \end{pmatrix} \in L \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, où $A \in S_p(\mathbb{R}), C \in S_q(\mathbb{R})$. On a

$$0 = \begin{pmatrix} A & -B \\ {}^tB & -C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ -{}^tB & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2A & 0 \\ 0 & -2C \end{pmatrix},$$

donc $A = C = 0$ et $U = \begin{pmatrix} 0 & B \\ {}^tB & 0 \end{pmatrix}$, ce qui fournit l'homéomorphisme $L \cap \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{pq}$ voulu.

□

En se rappelant que $O_p(\mathbb{R})$ et $O_q(\mathbb{R})$ ont deux composantes connexes, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 3

L'ensemble $O(p,q)$ a quatre composantes connexes.

En guise de complément, voici la démonstration du prérequis :

Lemme 4

L'exponentielle induit un homéomorphisme de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration.

- Si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, par le théorème spectral, on peut écrire $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$ est à valeurs propres strictement positives, donc appartient à $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
- *Injectivité* : soient $A, A' \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exp(A) = \exp(A')$. Écrivons $A = PDP^{-1}$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q(e^{\lambda_i}) = \lambda_i$: il vérifie donc $Q(\exp(A)) = A = Q(\exp(A'))$. Comme A' commute avec $\exp(A')$, il commute avec A donc A et A' sont simultanément diagonalisables ce qui donne immédiatement par injectivité de l'exponentielle réelle $A = A'$.
- *Surjectivité* : Soit $B = PDP^{-1} \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Si $A = PD'P^{-1}$ où $D' = \mathrm{Diag}(\ln \lambda_1, \ldots, \ln \lambda_n)$, alors $\exp(A) = B$.
- *Bicontinuité* : La continuité de exp étant connue, il reste à montrer que c'est une application ouverte. Soit $(B_p)_p = (\exp(A_p))_p$ suite de $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ convergeant vers $B = \exp A \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Alors comme B est inversible, $(B_p^{-1})_p$ converge vers B^{-1}. Ainsi, pour la norme $\|\cdot\|_2$, $(B_p)_p$ et $(B_p^{-1})_p$ sont bornées.
  Or, si $M \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\|M\|_2 = \rho(M)$ (car M est diagonalisable en base orthonormée à valeurs propres positives). Donc il existe $C, C'' > 0$ tel que $\forall p, \mathrm{sp}(B_p) \subset [0, C]$ et $\mathrm{sp}(B_p^{-1}) \subset [0, C'']$ de sorte que $\forall p, \mathrm{sp}(B_p) \subset [C', C]$ (où $C' = C''^{-1}$). Mais $\mathrm{sp}(A_p) = \ln \mathrm{sp}(B_p) \subset [\ln C', \ln C]$ donc $(A_p)_p$ est bornée.
  Il reste à montrer que cette suite n'a qu'une seule valeur d'adhérence pour conclure à sa convergence. Si $A_{\varphi(p)} \xrightarrow[p \to +\infty]{} A' \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors $\exp\left(A_{\varphi(p)}\right) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \exp(A')$ donc $\exp(A') = B = \exp(A)$, d'où par injectivité $A = A'$.

□

Référence : Philippe Caldero et Jérome Germoni (2013). *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*. T. 1. Calvage et Mounet, p. 210