# Ellipsoïde de John-Loewner

**Leçons : 152, *158, 171, 203, 219,* 229, 253**

**Définition 1**

*Un ellipsoïde centré en* $0$ *est une surface de* $\mathbb{R}^n$ *d'équation* $q(x) = 1$ *où* $q$ *est une forme quadratique définie positive. On le note* $\mathscr{E}_q$.

**Lemme 2**

*Si* $A$ *et* $B$ *sont deux matrices définies positives et* $\alpha \in ]0,1[$, *alors* $\det(\alpha A + (1-\alpha)B) \geqslant (\det A)^{\alpha}(\det B)^{1-\alpha}$ *avec inégalité stricte si* $A \neq B$.

**Démonstration.** On utilise le théorème de réduction simultanée : il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = {}^tPP$ et $B = {}^tPDP$ où $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$. Ainsi, si $\alpha \in ]0,1[$ :

$$\det(\alpha A + (1-\alpha)B) = (\det P)^2 \prod_{i=1}^{n} (\alpha + (1-\alpha)\lambda_i).$$

Or, ln étant strictement concave, pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\ln(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \geqslant \alpha \ln(1) + (1-\alpha)\ln(\lambda_i) = (1-\alpha)\ln(\lambda_i),$$

d'où en sommant et en composant par exp, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\alpha + (1-\alpha)\lambda_i) \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1-\alpha}$.

Mais $\det(A)^{\alpha}\det(B)^{1-\alpha} = \det P^{2\alpha+2(1-\alpha)} \det(D)^{1-\alpha} = \det P^2 \left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^{1-\alpha}$ donc on a l'inégalité voulue. □

**Théorème 3**

*Soit* $K$ *compact de* $\mathbb{R}^n$ *d'intérieur non vide. Il existe un unique ellipsoïde centré en* $0$ *de volume minimal contenant* $K$

**Démonstration.** On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, de norme associée $\|\cdot\|$. On note $\mathscr{Q}$ (resp. $\mathscr{Q}^+$, $\mathscr{Q}^{++}$) l'ensemble des formes quadratiques (resp. positives, définies positives) sur $\mathbb{R}^n$.

**Étape 1 : calcul du volume d'un ellipsoïde centré en** $0$.

Soit $q$ forme quadratique positive. Selon le théorème de réduction simultanée, il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique) et $a_1, \dots, a_n \geqslant 0$ tels que $M_{\mathscr{B}}(q) = \mathrm{Diag}(a_1, \dots, a_n)$.

Par un premier de changement de variable envoyant $(x_1, \dots, x_n)$ sur ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, on voit que le volume $V_q$ de $\mathscr{E}_q$ est

$$V_q = \int_{\{a_1u_1^2 + \dots + a_nu_n^2\}} \mathrm{d}x.$$

Donc, en posant $u_i' = \sqrt{a_i}u_i$, on obtient par un nouveau changement de variable $V_q = \dfrac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}} V_0$ où $V_0$ est le volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$. Or le déterminant de $M_{\mathscr{B}}(q)$ est

$D(q) = a_1 \dots a_n$, et c'est une quantité invariante par changement de base orthonormée, appelée discriminant. Donc $q \mapsto D(q)$ est une application continue sur $\mathcal{Q}^+$, qu'on va chercher à maximiser.

**Étape 2 : minimisation du discriminant.**

Soit $\mathcal{A} = \{q \in \mathcal{Q}^+ : \forall x \in K, q(x) \leqslant 1\}$. On munit l'espace vectoriel $\mathcal{Q}$ de la norme

$$N : q \mapsto \sup_{\|x\| \leqslant 1} |q(x)|.$$

*$\mathcal{A}$ est fermé* : supposons que la suite $(q_n) \in (\mathcal{Q}^+)^{\mathbb{N}}$ converge vers $q \in \mathcal{Q}$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|q_n(x) - q(x)| \leqslant N(q_n - q)\|x\|^2$ donc $q_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} q(x)$. En particulier, $q(x) \geqslant 0$ et $q(x) \leqslant 1$ pour $x \in K$.

*$\mathcal{A}$ est borné* : Comme $K$ est d'intérieur non vide, on peut fixer une boule $B(a, r) \subset K$. Donc si $q \in \mathcal{A}$ et $\|x\| \leqslant r$, $q(a + x) \leqslant 1$, de sorte que par l'inégalité de Minkowski,

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{q(a + x - a)} \leqslant \sqrt{q(a + x)} + \sqrt{q(a)} \leqslant 2.$$

Ainsi, pour $\|x\| \leqslant 1$, $q(x) = \dfrac{1}{r^2} q(rx) \leqslant \dfrac{2}{r^2}$, soit $N(q) \leqslant \dfrac{2}{r^2}$.

*$\mathcal{A}$ est non vide* : en effet, on peut trouver $M > 0$ tel que $K \subset B(0, M)$ et $q : x \mapsto \dfrac{\|x\|^2}{M^2}$ est un élément de $\mathcal{A}$.

Finalement, $q \mapsto D(q)$ est une application continue sur le compact non vide $\mathcal{A}$ donc elle est bornée et atteint ses bornes en $q_0 \in \mathcal{Q}^{++} \cap \mathcal{A}$ car le discriminant est nul pour un élément de $\mathbb{Q}^+ \setminus \mathcal{Q}^{++}$. En d'autres termes, selon l'étape 1, $\mathcal{E}_{q_0}$ est un ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant $K$.

**Étape 3 : Unicité.**

Supposons que $q_1$ soit un autre point de $\mathcal{A}$ où le minimum est atteint. Remarquons que $\mathcal{A}$ est convexe, et notons $q_2 = \dfrac{q_0 + q_1}{2} \in \mathcal{A}$. Alors par log-concavité stricte du déterminant, $D(q_2) > \sqrt{D(q_0)}\sqrt{D(q_1)} = D(q_0)$ qui est pourtant supposé maximal : c'est absurde.

□

**Proposition 4**

*Si $G$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $q \in \mathcal{Q}^{++}$ tel que $G \subset O(q)$.*

**Démonstration.** Soit $G$ un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $B$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme euclidienne. Introduisons $K = \{g(x) / g \in G, x \in B\}$. C'est un compact comme image de $G \times B$ par $(g, x) \mapsto g(x)$ continue. De plus, $B \subset K$ donc $K$ est d'intérieur non vide. Soit donc $\mathcal{E}_q$ l'ellipsoïde de John-Loewner associée à $K$ où $q \in \mathcal{Q}^{++}$.

Si $g \in G$, $q' : x \mapsto q(g(x))$ est définie positive et puisque $g(K) = K$, $\mathcal{E}_{q'}$ contient $K$. Classiquement, comme det est bornée sur $G$ compact, on a $|\det g| = 1$, donc $q'$ et $q$ ont même discriminant. Donc selon l'étape 3 de la preuve précédente, $q = q'$, *i.e.* $g \in O(q)$. Ainsi, $G \subset O(q)$.

□

**Remarque.** On peut même montrer que les sous-groupes compacts maximaux de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sont les $O(q)$ avec $q \in \mathcal{Q}^{++}$.

Remarquons d'abord qu'il suffit de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal. En effet, si $q \in \mathscr{Q}^{++}$, il existe une base de $E$ dans laquelle la matrice de $q$ est $I_n$, donc $O(q)$ et $O_n(\mathbb{R})$ sont conjugués.

Soit donc $G$ compact tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset G$. Soit $g \in G$. Par décomposition polaire, on peut écrire $G = OS$ où $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Donc $S = O^{-1}g \in G$. Mais $S$ est diagonalisable dans une base orthonormée donc on montre sans mal que $\|S\|_2 = \rho(S)$, plus grande valeur propre de $S$ (car les valeurs propres de $S$ sont positives). Ainsi, les valeurs propres de $S$ sont toutes égales à 1 puisque sinon $(S^k)_{k\in\mathbb{N}}$ ou $(S^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ ne seraient pas bornés. En d'autres termes, $S = I_n$ et $g \in O_n(\mathbb{R})$, ce qu'il fallait démontrer.

**Références :**


- Serge Francinou, Hervé Gianella et Serge Nicolas (2008). *Exercices de mathématiques – Oraux X-ENS : Algèbre 3*. Cassini, pp. 229-232
- Philippe Caldero et Jérome Germoni (2013). *Histoires hédonistes de groupes et de géométrie*. T. 1. Calvage et Mounet, p. 205 pour la remarque