Diagonalisation des opérateurs symétriques compacts

Leçons : 203, *205*, 213

Théorème 1

Soit H un Hilbert séparable et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur symétrique ($T = T^*$) compact non nul. Il existe $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ base hilbertienne de H constituée de vecteurs propres de T. La suite des valeurs propres de T, notée $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 et pour tout $x \in H$, $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n$.

Lemme 2

L'opérateur symétrique compact T admet $\|T\|$ ou $-\|T\|$ pour valeur propre.

Démonstration. Montrons d'abord que $\|T\|^2$ est valeur propre de T^2. On a pour tout élément x de H :

$$\begin{aligned}
\|T^2(x) - \|T\|^2 x\|^2 &= \|T^2x\|^2 + \|T\|^4\|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle T^2x, x\rangle \|T\|^2 \\
&\overset{T=T^*}{=} \|T^2x\|^2 + \|T\|^4\|x\|^2 - 2\|T\|^2\|Tx\|^2 \\
&\leqslant \|T\|^2(\|T\|^2\|x\|^2 - \|Tx\|^2.
\end{aligned}$$

Prenons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments unitaires tels que $\|T(x_n)\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|T\|$. Comme T est compact et (x_n) est bornée, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $T(x_n)$ admet une limite y. Donc $T^2(x_n)$ tend vers $T(y)$.

Par ailleurs, l'inégalité ci-dessus nous assure que $\left(\|T^2x_n - \|T\|^2x_n\|^2\right)_n$ tend vers 0 car $\|T\|^2(\|T\|^2 - \|T(x_n)\|^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $\|T\|^2x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(y)$, de sorte que x_n tend vers $x = \dfrac{T}{\|T\|^2}y \neq 0$. Comme $T^2x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} T(y) = \|T\|^2x$, on a $T^2(x) = \|T\|^2x$: x est un vecteur propre de T^2 associé à $\|T\|^2$.

Mais $T^2 - \|T\|^2 = (T - \|T\|)(T + \|T\|)$ donc ou bien $(T + \|T\|)(x) = 0$ et $-\|T\|$ est valeur propre de T, ou bien $x' = (T + \|T\|)(x) \neq 0$ et x' est vecteur propre de T associé à la valeur propre $\|T\|$.

□

Démonstration (du théorème)**.** Construisons par récurrence une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante en module de valeurs propres de T.

On pose $T_1 = T \neq 0$. Selon la première étape, on peut trouver une valeur propre λ_1 de module $\|T\|$ de T. Comme T est compact, l'espace propre $E_1 = \ker(T - \lambda_1 \mathrm{id})$ est de dimension finie donc fermé ; d'où, selon le théorème du supplémentaire orthogonal $H = E_1 \oplus E_1^{\perp}$.

Supposons construits $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valeurs propres de T telles que λ_k est de module $\|T_k\|$ où $\|T_k\|$ est la restriction de T à $\left(\bigoplus_{i=1}^{k-1} E_i\right)^{\perp}$ où $E_i = \ker(T - \lambda_i)$ (sous-espace stable par T symétrique comme orthogonal d'un sous-espace stable). En particulier, $|\lambda_n| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_1|$.

Si T_{n+1} est nul, la construction s'arrête.

Sinon, T_{n+1} est symétrique compact non nul donc selon le lemme, il admet une valeur propre λ_{n+1} de module $\|T_{n+1}\|$. C'est également une valeur propre de T et $H = \bigoplus_{i=1}^{n+1} E_i \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n+1} E_i\right)^\perp$, les sommes directes étant orthogonales puisque $\ker(T-\lambda_{n+1}) = \ker(T_{n+1} - \lambda_{n+1}) \subset \left(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i\right)^\perp$.

Montrons que les λ_n forment une suite tendant vers 0 et qu'elles sont les seules valeurs propres non nulles de T. Ceci est clair si la récurrence précédente s'arrête puisqu'il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \ker(T-\lambda_i)\right)^\perp \subset \ker T$ donc

$$H = \bigoplus_{i=1}^{N} \ker(T-\lambda_i) \oplus \ker T.$$

Supposons donc $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}\}$ infini. La suite $(|\lambda_n|)$ est décroissante et minorée donc tend vers sa borne inférieure $m \geqslant 0$. Si $m \neq 0$, prenons pour tout n, un élément (e_n) unitaire tel que $T(e_n) = \lambda_n e_n$. Comme T est compact et $\left(\frac{e_n}{\lambda_n}\right)$ est bornée, quitte à extraire une sous-suite, on a $e_n = T\left(\frac{e_n}{\lambda_n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} z \in H$. Mais comme les espaces propres associés aux λ_n sont deux à deux orthogonaux, on a pour tout $n \neq m$, $\|e_n - e_m\|^2 = 2$: (e_n) n'étant pas de Cauchy, elle ne peut donc converger.

Ainsi, $m = 0$ et $|\lambda_n|$ tend vers 0.

Maintenant, si $F = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} E_n$, on a $F^\perp \subset \ker T$. En effet, si $T_{|F^\perp}$ était non nul, cet opérateur symétrique compact admettrait une valeur propre λ de module $\|T_{|F^\perp}\|$. Or, pour tout n, λ_n est de module $\left\|T_{|\bigoplus_{i=1}^{n-1} E_i}\right\| \geqslant \|T_{|F^\perp}\|$ donc en faisant tendre n vers l'infini, $\lambda = 0$ ce qui est absurde. D'où $F^\perp \subset \ker T$, l'autre inclusion étant également facilement vérifiable.

Conclusion : par le théorème du supplémentaire orthogonal, $H = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} E_n} \oplus \ker T$, les sommes étant orthogonales. Pour tout n, $E_n = \ker(T-\lambda_n)$ est de dimension finie [1], on en prend une base orthonormée $(e_n^m)_{1\leqslant m \leqslant N_m}$. En concaténant ces bases, on obtient $(e_n^m)_{n,m}$ base hilbertienne de $\overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} E_n}$ formée de vecteurs propres de T. Par ailleurs, on peut fixer une base hilbertienne $(e_0^m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $\ker T$ (qui est séparable car H l'est). La réunion de ces deux bases fournit la base hilbertienne de H annoncée.

□

Référence : Inspiré de Michel Willem (2003). *Analyse fonctionnelle élémentaire*. Cassini, pp. 38-40, mais largement remanié par Salim Rostam (`http://perso.eleves.ens-rennes.fr/~srostam/html/Agreg/index.html`).

1. $T_{|E_n} = \lambda_n \mathrm{id}$ est compact donc $\lambda_n \overline{B_{E_n}(0,1)}$ est compact, ce qui selon le théorème de Riesz ne peut se produire que si E_n est de dimension finie.