Borne de Bézout

Leçons : 142, 144, 152

Théorème 1

Soit k un corps infini et $A, B \in k[X,Y]$ de degrés totaux respectifs m et n. Alors si $Z(A)$ désigne l'ensemble des zéros de A, on a $\mathrm{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leqslant mn$.

Démonstration. Étape 1 : majoration du degré d'un résultant

On sait que si $(x,y) \in Z(A) \cap Z(B)$, on a $\mathrm{Res}_X(A,B)(y) = \mathrm{Res}_Y(A,B)(x) = 0$, donc

$$\mathrm{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leqslant \deg \mathrm{Res}_X(A,B) \times \deg \mathrm{Res}_Y(A,B)).$$

Écrivons $A = \sum_{i=0}^{p} a_i(X) Y^i$, $B = \sum_{j=0}^{q} b_j(X) Y^j$ où pour tout i, $\deg a_i \leqslant m - i$, pour tout j, $\deg b_j \leqslant n - j$.

Le résultant $\mathrm{Res}_Y(A,B)$ est le déterminant de la matrice de Sylvester

$$C = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant p+q} = \begin{pmatrix} a_0 & & (0) & b_0 & & (0) \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & \vdots & b_q & & \\ & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ (0) & & a_p & (0) & & b_q \end{pmatrix}$$

où si $1 \leqslant j \leqslant q$,

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i-j} & \text{si} \quad 0 \leqslant i - j \leqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

et si $q + 1 \leqslant j \leqslant p + q$,

$$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i-j+q)} & \text{si} \quad 0 \leqslant i - j + q \leqslant p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}{}^{1}.$$

Donc $\mathrm{Res}_Y(A,B) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{p+q} c_{\sigma(j),j}$. Or, si $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}$,

$$\begin{aligned} \deg\left(\prod_{j=1}^{p+q} c_{\sigma(j),j}\right) = \sum_{j=1}^{p+q} \deg(c_{\sigma(j),j}) &\leqslant \sum_{j=1}^{q} m - (\sigma(j) - j) + \sum_{j=q+1}^{p+q} n - (\sigma(j) - j + q) \\ &\leqslant (m-p)(q-n) + mn \leqslant mn, \end{aligned}$$

puisque $q \leqslant n$ et $p \leqslant m$. Ainsi, $\deg \mathrm{Res}_Y(A,B) \leqslant mn$, et symétriquement, il en va de même de $\mathrm{Res}_X(A,B)$. D'où $\mathrm{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leqslant (mn)^2$.

Étape 2 : changement de variable astucieux

Notons $Z(A) \cap Z(B) = \{(x_i, y_i), i \in I\}$, I fini. Soit $\mathscr{E} = \left\{ \dfrac{x_i - x_j}{y_j - y_i}, i \neq j, y_j \neq y_i \right\}$ qui est également fini.

1. pour s'en souvenir, examiner les éléments en bas à droite des deux moitiés de la matrice correspondant à A et B.

Soit $u \in k^* \setminus \mathscr{E}$ (k est infini). Si $i \neq j \in I$,

$$x_i + uy_i = x_j + uy_j \Leftrightarrow x_i - x_j = u(y_j - y_i) \Leftrightarrow u = \frac{x_i - x_j}{y_j - y_i} \quad \text{ou} \quad (x_i, y_i) = (x_j, y_j)$$

ce qui est faux car $u \notin \mathscr{E}$. Donc $\varphi : (x, y) \in Z(A) \cap Z(B) \mapsto x + uy$ est injective.

Posons $\tilde{A}(X, Y) = A(X - uY, Y)$ et $\tilde{B}(X, Y) = B(X - uY, Y)$. Si $(x, y) \in Z(A) \cap Z(B)$, $\tilde{A}(x + uy, y) = A(x, y) = 0$ et $\tilde{B}(x, y) = 0$, d'où $\mathrm{Res}_Y(\tilde{A}, \tilde{B})(x + uy) = 0$.

Ainsi, φ est à valeurs dans l'ensemble des racines de $\mathrm{Res}_Y(\tilde{A}, \tilde{B})$. Selon l'étape 1, comme $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont de degrés totaux inférieurs à ceux de A et B, on a $\mathrm{Card}(Z(A) \cap Z(B)) \leqslant mn$.

$\square$

Remarque. Le « vrai » théorème de Bézout affirme que le nombre de points d'intersections des courbes algébriques définies par A et B est égal à mn, à condition de les compter avec une notion de « multiplicité » à définir.

Références : bricolé (merci à Adrien Laurent) à partir de :

- Jean-Yves MÉRINDOL (2006). *Nombres et algèbre*. EDP Sciences
- Aviva SZPIRGLAS (2009). *Mathématiques L3*. Pearson Education