Banach-Steinhaus et séries de Fourier

Leçons : 205, 208, 209, *241*, 246

Théorème 1

Soit E espace de Banach, F espace vectoriel normé, $H \subset \mathscr{L}_c(E,F)$. Alors soit il existe M tel que $\forall f \in H, \|f\| \leqslant M$, soit l'ensemble des $x \in E$ tels que $\sup\limits_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$ est dense dans E.

Démonstration. Introduisons pour $k \in \mathbb{N}$, $\Omega_k = \{x \in E : \exists f \in H, \|f_i(x)\| > k\}$. Le complémentaire de cette ensemble étant fermé comme intersection de fermés, Ω_k est ouvert. Si $\Omega = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \Omega_k$, on remarque que $\forall x \in \Omega, \sup\limits_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que Ω_k ne soit pas dense. Il existe $x_0 \in E, r > 0$ tel que $B(x_0, r) \cap \Omega_k = \emptyset$. Si $\|x\| < r$ et $f \in H$, alors $\|f(x + x_0)\| \leqslant k$ donc $\|f(x)\| \leqslant k + \|f(x_0)\|$.

Donc si $\|x\| \leqslant 1$,

$$\|f(x)\| = \left\| \frac{2}{r} f\left(\frac{rx}{2}\right) \right\| \leqslant \frac{2k}{r} + \frac{2}{r}\|f(x_0)\|.$$

Ainsi, $\|f\| \leqslant \dfrac{2k}{r} + \dfrac{2}{r}\|f(x_0)\|$.

Sinon, tous les Ω_k sont denses donc selon le théorème de Baire, Ω est dense dans l'espace complet E donc l'ensemble des $x \in E$ tels que $\sup\limits_{f \in H} \|f(x)\| = +\infty$, qui le contient, également.

$\square$

Proposition 2

L'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques dont la série de Fourier diverge en 0 est dense dans $\mathscr{C}^0_{2\pi}$.

Démonstration. Rappelons que $\mathscr{C}^0_{2\pi}$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rccl} l_n : & \mathscr{C}^0_{2\pi} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & S_n(f)(0) = \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k(f) \end{array}.$$

Pour tout $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}$, $l_n(f) = (f \star D_n)(0) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} f(t) \mathrm{d}t$ donc $|l_n(f)| \leqslant \|D_n\|_1 \|f\|_\infty$ de sorte que $\|l_n\| \leqslant \|D_n\|_1$.

Pour $\varepsilon > 0$, soit $f_\varepsilon : t \to \dfrac{|D_n(t)|}{|D_n(t)| + \varepsilon} \in \mathscr{C}^0_{2\pi}$. Alors par convergence dominée, comme $\forall \varepsilon, \forall t, |f_\varepsilon(t)| \leqslant 1$,

$$l_n(f_\varepsilon) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|D_n(t)|^2}{|D_n(t)| + \varepsilon} \mathrm{d}t \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \mathrm{d}t.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|l_n\| = \|D_n\|_1$.

Or, il découle de l'inégalité $\sin t \leqslant t$, valable pour $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, que

$$\|D_n\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{|t|} \left|\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)\right| \mathrm{d}t \geqslant 2\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\right|}{|t|} \mathrm{d}t \geqslant \int_0^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{|\sin u|}{u} \mathrm{d}u.$$

Donc $(\|D_n\|_1)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend en croissant vers $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}\frac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u$, par convergence monotone. Mais $\varphi : u \mapsto \dfrac{|\sin u|}{u}\mathrm{d}u$ n'est pas intégrable. En effet, elle est périodique de moyenne $M = \displaystyle\int_0^{2\pi}\varphi(u)\mathrm{d}u > 0$ donc $\int_0^{2\pi n}\varphi(u)\mathrm{d}u = nM \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ alors que dans le même temps, toujours par convergence monotone, cette suite tend vers $\int_{\mathbb{R}_+}\varphi(u)\mathrm{d}u$.

En conclusion, le premier cas de l'alternative du théorème de Banach-Steinhaus ne pouvant être réalisée, il s'ensuit que l'ensemble des $f \in \mathscr{C}^0_{2\pi}$ tels que $(l_n(f))_n$ n'est pas bornée est dense dans $\mathscr{C}^0_{2\pi}$. □

Remarque. Dans l'alternative du théorème de Banach-Steinhaus, le premier cas est en particulier réalisé quand il existe $x \in E$ tel que $\sup_{f\in H}\|f(x)\| < +\infty$.

Référence : Walter RUDIN (1970). *Real and complex analysis*. 3e éd. McGraw-Hill series in higher mathematics. ; International student edition. McGraw-Hill, p. 130