Formulaire d'analyse

Formules de dérivation :

Fonction de x	Ensemble de définition	Dérivée
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$1/x$	$\mathbb{R}^*$	$-1/x^2$
$\sqrt{x}$	$[0, +\infty[^{(*)}$	$1/(2\sqrt{x})$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$1/x$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$	$[0, +\infty[^{(*)}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$1 + \tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$
$\arccos(x)$	$[-1, 1]^{(*)}$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$\arcsin(x)$	$[-1, 1]^{(*)}$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$1/(1+x^2)$

Les astérisques sont pour les fonctions qui ne sont pas dérivables sur tout leur domaine de définition : $\sqrt{x}$ ne l'est pas en 0, et $\arccos$ et $\arcsin$ ne le sont pas en -1 ni en 1. Pour x^α, elle est dérivable en 0 seulement lorsque $\alpha \geq 1$. Les formules usuelles de dérivation sont, pour des fonctions f et g dérivables et là où les fonctions sont bien définies :

$$
\begin{aligned}
(f+g)' &= f' + g' \\
(af)' &= af' \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}. \\
(1/f)' &= -f'/f^2 \\
(f/g)' &= (f'g - fg')/g^2 \\
(f^2)' &= 2f'f \\
\sqrt{f}' &= 1/(2\sqrt{f}) \\
(e^f)' &= f'e^f \\
\ln(f)' &= f'/f \\
(f \circ g)' &= (f' \circ g) \cdot g'
\end{aligned}
$$

Remarque : la formule de dérivation des fonctions composées permet de retrouver les quatre formules ci-dessus.

Primitives

Fonction	Intervalle d'intégration	Primitive
$(x-a)^n, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$(x-a)^{n+1}/(n+1)$
$1/(x-a), a \in \mathbb{R}$	$]-\infty; a[$ OU $]a, +\infty[$	$\ln(\lvert x-a \rvert)$
$1/(x-a)^n, a \in \mathbb{R}, n \geq 2$	$]-\infty, a[$ OU $]a, +\infty[$	$-(x-a)^{n-1}/(n-1)$
$\cos(ax), a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$\sin(ax)/a$
$\sin(ax), a \neq 0$	$\mathbb{R}$	$-\cos(ax)/a$
$\tan(x)$	$]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\ln(x)$	$]0, +\infty[$	$x\ln(x) - x$
$e^{ax}, a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}$	e^{ax}/a
$(x-a)^\alpha, a \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$	$]a, +\infty[$	$(x-a)^{\alpha+1}/(\alpha+1)$
$1/(1+x^2)$	$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$
$\sqrt{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]a, +\infty[$	$2/3(x-a)^{3/2}$
$1/\sqrt{x-a}, a \in \mathbb{R}$	$]a, +\infty[$	$2\sqrt{x-a}$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$]-1, 1[$	$\arcsin(x)$

Propriétés de l'intégrale

Pour des fonctions f et g définies et continues sur un intervalle contenant a, b et c, et λ un réel :

$$\begin{aligned}
\int_b^a f(x)dx &= -\int_a^b f(x)dx \\
\int_a^b (f+g)(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{(Additivité de l'intégrale)} \\
\int_a^b (\lambda f)(x)dx &= \lambda \int_a^b f(x)dx. \\
\int_a^c f(x)dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx \quad \text{(Relation de Chasles)}
\end{aligned}$$

Théorème fondamental de l'intégration

Si F est une primitive de f sur un intervalle contenant a et b,

$$\int_a^b f(x)dx = [F]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemples Avec les formules de primitives données ci-dessus, on peut vérifier que

$$\int_1^5 \frac{1}{x}dx = \ln(5) - \ln(1) = \ln(5), \quad \int_0^{10} x^2 dx = \frac{1}{3}10^3 - \frac{1}{3}0^3 = \frac{1000}{3},$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi} \sin(x)dx = -\cos(3\pi) - (-\cos(\pi/2)) = -1.$$

Intégration par parties

Si f et g sont deux fonctions dérivables à dérivée continue sur un intervalle contenant a et b,

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [fg]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Changement de variables

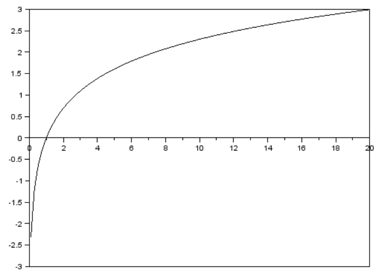
Si f et g sont deux fonctions dérivables et la composée $f \circ g$ est bien définie sur un intervalle contenant a et b,

$$\int_a^b f \circ g(x)g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt.$$

Fonctions usuelles : logarithme et exponentielle, fonction puissance, fonctions circulaires et leurs réciproques

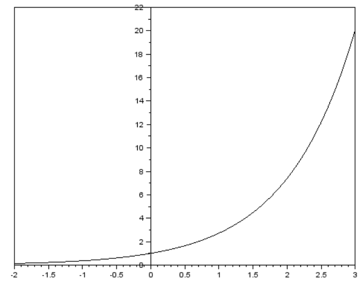
Propriété 1

1. $\ln$ *est continue et strictement croissante sur* $]0, +\infty[$.
2. $\forall x, y \in]0, +\infty[, \quad \ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$.
3. $\forall x > 0, \quad \ln(1/x) = -\ln(x)$.
4. $\forall x, y \in]0, +\infty[, \quad \ln(x/y) = \ln(x) - \ln(y)$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \quad \ln(x^n) = n\ln(x)$.
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$



Propriété 2

1. $\exp$ *est continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x} = 1/e^x$.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$.
5. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{nx} = (e^x)^n$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.



Propriété 3 *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$ *et* $\forall x > 0, e^{\ln(x)} = x$.

Définition 1 (Fonction puissance) *Soit* $\alpha \in \mathbb{R}$. *On définit la* fonction puissance *sur* $]0, +\infty[$ *par* $x^\alpha := e^{a\ln(x)}$.

Exemples :

$$\ln(x^2) = 2\ln(x), \quad e^{2x+y} = e^{2x} \cdot e^y, \quad 2^x = e^{x\ln(2)}, \quad \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\ln(x)}, \quad \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}\ln(x)}.$$

Croissances comparées : Pour tous $\alpha > 0, \beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} x^\beta |\ln x|^\alpha = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^\beta e^{\alpha x} = 0$$

Autrement dit, l'exponentielle impose toujours sa limite en $\pm\infty$ aux fonctions puissances, et celles-ci imposent toujours leur limites en 0^+ ou $+\infty$ au logarithme.

Fonctions trigonométriques et réciproques

On suppose connues les fonctions *sinus* et *cosinus*. On rappelle que la fonction *tangente* est définie par $\tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ (donc pas définie si $\cos(x) = 0$, c'est-à-dire si $x = \pi/2 + k\pi$ pour un entier k).

Formules de trigonométrie

$$\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

$$\cos(-a) = \cos(a) \quad \sin(-a) = -\sin(a) \quad \tan(-a) = -\tan(a)$$

$$\cos(a+2\pi) = \cos(a) \quad \sin(a+2\pi) = \sin(a) \quad \tan(a+\pi) = \tan(a)$$

Valeurs spéciales des fonctions trigonométriques

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Définition 2 (Arcsinus) *Sinus est une bijection strictement croissante de* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *sur* $[-1,1]$. *On appelle* arcsinus *sa réciproque, définie sur* $[-1,1]$ *et à valeurs dans* $[-\pi/2,\pi/2]$.

$$\forall x\in[-1,1],\forall\theta\in[-\pi/2,\pi/2],\quad x=\sin(\theta)\Leftrightarrow arcsin(x)=\theta.$$

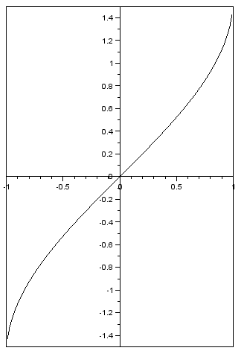
Définition 3 (Arccosinus) *Cosinus est une bijection de* $[0;\pi]$ *sur* $[-1;1]$. *On appelle* arccosinus *sa réciproque, définie sur* $[-1,1]$ *et à valeurs dans* $[0,\pi]$

$$\forall x\in[-1,1],\forall\theta\in[0,\pi],\quad x=\cos(\theta)\Leftrightarrow arccos(x)=\theta.$$

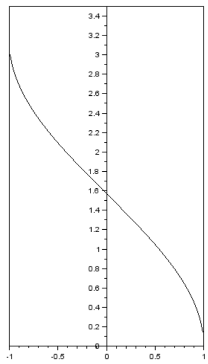
Définition 4 (Arctangente) *Tangente est une bijection de* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ *sur* $\mathbb{R}$. *On appelle* arctangente *sa réciproque, définie sur* $\mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

$$\forall x\in\mathbb{R},\forall\theta\in]-\pi/2,\pi/2[,\quad x=\tan(\theta)\Leftrightarrow arctan(x)=\theta.$$

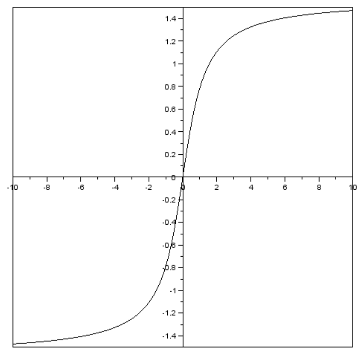
Arcsinus



Arccosinus



Arctangente



Propriété 4

1. $\forall x\in[-1;1],\sin(arcsin(x))=x.$
2. $\forall x\in[-1;1],\cos(arccos(x))=x.$
3. $\forall x\in\mathbb{R},\tan(arctan(x))=x.$

Ici x appartient au domaine de définition de la fonction réciproque.

Propriété 5

1. $\forall\theta\in[-\pi/2,\pi/2],\arcsin(\sin(\theta))=\theta.$
2. $\forall\theta\in[0,\pi],\arccos(\cos(\theta))=\theta.$
3. $\forall\theta\in[-\pi/2,\pi/2],arctan(\tan(\theta))=\theta.$

★ Attention, ici θ ne parcourt pas tout l'ensemble de définition des fonctions sinus, cosinus ou tangente !

Valeurs spéciales des fonctions trigonométriques réciproques

x	-1	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-1/2$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\arccos(x)$	π	$5\pi/6$	$3\pi/4$	$2\pi/3$	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$	0
$\arcsin(x)$	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$