Fractions continues
TD n°2 : Approximation diophantienne et nombres quadratiques

Exercice 1. [Théorème de Liouville]

Soit α un nombre algébrique réel de degré $d > 1$, c'est-à-dire une racine réelle d'un certain polynôme irréductible unitaire P à coefficients rationnels. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème de Liouville, à savoir qu'il existe une constante $A > 0$ telle que pour toutes fractions p/q,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{A}{q^d}.$$

(a) Dans le cas où α est rationnel, montrer qu'on peut trouver une constante A telle que le théorème est vrai avec A sauf pour $p/q = \alpha$.

(b) Supposons maintenant que α est de degré $d > 1$. Soit k un entier tel que $P_1 = kP$ est à coefficients entiers. Montrer que pour tout p/q,

$$q^d \left|P(\alpha) - P(p/q)\right| \geq 1.$$

(c) Majorer $P(\alpha) - P(p/q)$ en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

(d) En déduire le théorème de Liouville.

(e) Donner des exemples de nombres transcendants.

Exercice 2. [Approximation à précision quadratique des nombres réels] Soit α un nombre réel.

(a) Montrer que toute fraction a/b telle que

$$|\alpha - a/b| < \frac{1}{2b^2}$$

est une convergente de α.

Pour comprendre à quelle vitesse on peut approcher un nombre réel par des rationnels, on peut donc se contenter d'étudier la vitesse d'approximation des convergentes.

On suppose à partir de maintenant que α admet une convergente d'ordre $n > 1$. On définit pour tout $k \in \{2, \cdots, n\}$,

$$\varphi_k = q_{k-2}/q_{k-1}, \quad \psi_k = r_k + \varphi_k = [a_k, \cdots] + \varphi_k$$

(b) Démontrer que pour tout $k \geq 2$, $1/\varphi_{k+1} = a_k + \varphi_k$, et $1/\varphi_k + 1/r_k = \psi_{k-1}$.

(c) En déduire que si $\psi_k \leq \sqrt{5}$ et $\psi_{k-1} \leq \sqrt{5}$ alors

$$\varphi_k > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Supposons maintenant que pour $k = n, n-1, n-2$, on ait

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| \geq \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}.$$

(d) En utilisant que $\alpha = (p_n r_{n+1} + q_n)/(q_n r_{n+1} + q_{n-1})$ (cf. TD 1), montrer que sous cette hypothèse, $\psi_{k+1} \leq \sqrt{5}$ pour $k = n, n-1, n-2$.

(e) Déduire du (e) que φ_n et φ_{n+1} sont tous les deux strictement supérieurs à $(\sqrt{5}-1)/2$.

(f) En déduire une contradiction. On a donc prouvé que pour $k = n-2, n-1, n$, au moins une des inégalités

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q_k^2}$$

est vérifiée. En particulier, pour tout irrationnel α, une infinité de fractions approchent α avec cette précision.

(g) En considérant le nombre d'or, montrer que le facteur $1/\sqrt{5}$ est le meilleur qu'on puisse espérer Écrire le théorème regroupant les résultats prouvés dans cet exercice.

Exercice 3. [Nombres à approximation rationnelle précise]

(a) En utilisant les résultats du TD 1, démontrer que pour un irrationnel α, on a pour tout $n \geq 1$ l'inégalité

$$\frac{1}{q_n(a_{n+1}+2)} < \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_n^2 a_{n+1}}.$$

(b) Démontrer que pour toute fonction $f : \mathbb{N}^* \to]0, +\infty[$, il existe un irrationnel α telle que l'inégalité

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < f(q)$$

est vraie pour une infinité de rationnels p/q.

(c) Démontrer que pour tout α irrationnel :

- Si les coefficients $a_0, \cdots, a_n, \cdots$ du développement de α sont bornés, pour $c > 0$ suffisamment petit, l'inégalité

  $$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{c}{q^2}$$

  n'a pas de solutions entières p, q.
- Si ces coefficients ne sont pas bornés, pour n'importe quel $c > 0$, cette inégalité a une infinité de solutions.

Exercice 4. [Fractions continues périodiques et nombres quadratiques]

Dans cet exercice, on manipulera des fractions continues à coefficients quelconques.

(a) Soit α, β des réels et $a_0, \cdots, a_n$ des entiers positifs tels que

$$\alpha = [a_0, a_1, \cdots, a_n, \beta].$$

Montrer par récurrence qu'il existe des rationnels a, b, c, d tels que

$$\alpha = \frac{a\beta + b}{c\beta + d}.$$

(b) En déduire que si le développement en fraction continue d'un réel α est périodique à partir d'un certain rang, celui-ci est quadratique, c'est-à-dire racine d'un polynôme de degré deux à coefficients rationnels.

On cherche maintenant à montrer la réciproque de ce résultat. Soit α vérifiant l'équation

$$A\alpha^2 + b\alpha + c = 0$$

avec A, B, C entiers, $A \neq 0$.

On note $[a_0, \cdots, a_n, \cdots]$ le développement en fraction continue de α, et p_n/q_n les convergentes, $r_n = [a_{n+1}, \cdots]$ les restes.

(c) Démontrer que r_n est solution de l'équation

$$A_n r_n^2 + B_n r_n + C_n = 0$$

avec

$$\begin{array}{rcl} A_n & = & Ap_{n-1}^2 + Bp_{n-1}q_{n-1} + Cq_{n-1}^2 \\ B_n & = & 2Ap_{n-1}p_{n-2} + B(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + 2Cq_{n-1}q_{n-2} \\ C_n & = & Ap_{n-2}^2 + Bp_{n-2}q_{n-2} + Cq_{n-2}^2 \end{array}$$

(d) En déduire que $C_n = A_{n-1}$ et que $B_n^2 - 4A_nC_n = b^2 - 4ac$ pour tout $n \geq 1$.

(e) Définissons δ_{n-1} par $p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \delta_{n-1}/q_{n-1}$. Que peut-on dire sur δ_{n-1} ?

(f) En déduire en remplaçant p_{n-1} dans son expression que

$$|A_n| < 2|a\alpha| + |a| + |b|$$

(f) Montrer que les A_n, B_n, C_n sont des entiers bornés, et donc qu'il existe deux entiers m et n tels que $r_m = r_{m+n}$. Conclure avec l'aide des questions (a) et (b).