Fractions continues
Erratum du TD 4 Exercice 3

Tel qu'énoncé, l'exercice 3 du TD 4 est faux : ce n'est pas parce que la suite $h_n(z)$ converge en trois valeurs distinctes que les limites obtenues sont forcément distinctes. Voici un substitut correct de cet exercice (pour ceux qui veulent le refaire par eux-mêmes), précédé du théorème exact qu'il démontre, et suivi de son corrigé.

On note comme d'habitude h_M l'homographie associée à $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}$ le groupe des homographies, muni de la métrique de convergence uniforme associée à la distance cordale. La convergence simple est ici la convergence dans $\widehat{\mathbb{C}}$ et non pas $\mathbb{C}$ seulement, y faire attention.

Théorème (Piranian-Thron, 1957). *Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'homographies. Alors, le comportement de la convergence simple de cette suite est dans l'un des cinq cas suivants, du plus dégénéré au plus uniforme :*

(a) La suite $(h_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge nulle part.

(b) La suite $(h_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$, là où elle converge, a toujours la même limite.

(c) La suite $(h_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge qu'en deux points distincts, et a deux valeurs distinctes.

(d) La suite $(h_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge partout, et définit une fonction constante hors d'un point.

(e) La suite $(h_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge en trois points avec trois limites distinctes, et alors la suite des h_n converge uniformément vers une homographie h. En particulier, la suite des valeurs converge partout, et la fonction limite est une homographie.

Exercice 1. On garde les notations du théorème, en notant $M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ associée à h_n.

(a) Montrer que pour deux homographies $h, h' \in \mathcal{M}$, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans un des cinq cas du théorème si et seulement si $(h \circ h_n \circ h')_{n\in\mathbb{N}}$ est dans ce cas.

(b) En écartant les cas (a) et (c) du théorème, montrer qu'on peut supposer que $h_n(z)$ converge en 0, 1 et ∞. On le fera à partir de cette question.

(c) On étudie dans cette question et jusqu'au (e) le cas où les trois limites obtenues en 0, 1 et ∞ sont distinctes. Montrer qu'on peut supposer que ce sont respectivement 0,1, et ∞.

(d) En définissant $f_n(z) = (z - h_n(0))/(h_n(1) - h_n(0))$, montrer que $f_n \circ h_n$ provient d'une matrice de la forme

$$M'_n = \begin{pmatrix} a'_n & 0 \\ c'_n & d'_n \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}), \quad \text{avec } a'_n = c'_n + d'_n,\ \mathrm{Re}(d'_n) \geq 0.$$

(e) Montrer que M'_n tend coefficient par coefficient vers l'identité, et en déduire que h_n converge dans $\mathcal{M}$ vers l'identité : cas (e) du théorème.

(f) On se place maintenant dans le cas où deux limites parmi les trois sont égales. Montrer qu'on peut supposer que la limite en 0 et la limite en ∞ sont égales à 0, on le fait à partir de maintenant.

(g) Montrer que a_n/c_n et b_n/d_n tendent vers 0, et que $c_n d_n$ tend vers ∞. On suppose à partir de maintenant que $c_n \neq 0$ et $d_n \neq 0$ pour tout n.

(h) Montrer que la convergence de la suite $(h_n(z))$ équivaut à celle de la suite

$$\frac{-1/c_n^2}{z + d_n/c_n}$$

et qu'elles ont la même limite.

(i) En prenant une extractrice φ telle que $-d_{\varphi(n)}/c_{\varphi(n)}$ converge vers une limite l (finie ou infinie), montrer que si $h_n(z)$ converge pour $z \neq l$, elle converge vers 0.

(j) En déduire que si la suite $-d_n/c_n$ converge, on est dans le cas (b) ou (d) du théorème, et que si elle diverge, la suite $h_n(z)$ converge toujours vers 0 si elle converge (cas (b)).

Démonstration.

(a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite $(h_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la suite $h \circ h_n \circ h'(h'^{-1}(z))$ converge, et l'image de la première limite par h est la seconde limite. Il suffit alors de regarder chaque cas du théorème et de prouver que la composition à gauche et à droite par une homographie ne change aucunement chacun des énoncés.

(b) Les cas où la suite ne converge que pour une ou deux valeurs de z sont trivialement couverts par les cas (a), (b) et (c). On peut donc supposer désormais que la suite converge en au moins trois valeurs, et l'action des homographies étant 3-transitive, d'après le (a), on peut supposer que ces trois valeurs sont 0, 1 et ∞.

(c) En composant à gauche par h, les trois limites étant distinctes, encore une fois par 3-transitivité, on peut supposer que ce sont respectivement 0,1 et ∞.

(d) On observe immédiatement que $f_n \circ h_n(0) = 0$ et $f_n \circ h_n(1) = 1$, donc le coefficient en haut à droite de M'_n est bien nul, et $a'_n = c'_n + d'_n$. Quitte à remplacer M'_n par $-M'_n$, on peut également supposer que $\mathrm{Re}(d'_n) \geq 0$.

(e) Comme $h_n(\infty)$ tend vers ∞, $f_n \circ h_n(\infty)$ tend vers ∞, et donc a'_n/c'_n tend vers ∞, et donc d'_n/c'_n aussi car $a'_n/c'_n = 1 + d'_n/c'_n$. En conséquence, $a'_n d'_n / {c'_n}^2$ tend vers ∞ en module, or le numérateur vaut 1. On en conclut donc que c'_n tend vers 0, et alors $a'_n - 1/a'_n$ tend vers 0 donc la suite a'_n a deux valeurs d'adhérence possibles, 1 et -1. Mais cette dernière est exclue car d'_n est de partie réelle positive, donc a'_n et d'_n tendent vers 1, ainsi M'_n tend vers l'identité. En utilisant l'inégalité

$$\sigma_0(h_M, I) \leq \sqrt{6}||M - I||$$

on en déduit que $f_n \circ h_n$ converge uniformément vers l'identité, mais d'un autre côté, f_n converge uniformément vers l'identité. Donc h_n converge uniformément vers l'identité, $\mathcal{M}$ étant un groupe topologique pour la métrique σ_0. On est donc dans le cas (e).

(f) En composant à droite par une homographie h', on peut envoyer deux valeurs pour lesquelles les limites sont égales sur 0 et ∞, et ladite limite sur 0 par composition à gauche par h.

(g) On est dans la situation où $h_n(0)$ tend vers 0, tout comme $h_n(\infty)$. En explicitant les valeurs de ces suites, on en déduit donc respectivement que b_n/d_n tend vers 0 et a_n/c_n tend vers 0, c'est-à-dire $b_n = o(d_n)$ et $a_n = o(c_n)$. En particulier, à partir d'un certain rang, c_n et d_n sont non nuls, ce qu'on suppose maintenant toujours vrai. Or, on a

$$\frac{a_n}{c_n} - \frac{b_n}{d_n} = \frac{1}{c_n d_n}$$

donc $c_n d_n$ tend vers ∞.

(h) On vérifie directement que pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$,

$$h_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n} = \frac{a_n}{c_n} - \frac{1}{c_n(c_n z + d_n)} = \frac{a_n}{c_n} - \frac{1/c_n^2}{(z + d_n/c_n)}$$

Le premier terme de la somme tend vers 0 d'après la question précédente, ce qui prouve la question (h).

(i) Pour l'extractrice φ, si la limite l est finie, comme $c_n d_n$ tend vers ∞, cela signifie que $c_{\varphi(n)}$ tend vers ∞, et alors, pour tout $z \neq l$ (potentiellement égal à ∞), d'après la formule ci-dessus, $h_{\varphi(n)}(z)$ tend vers 0. Si la limite l est ∞, pour z fini $c_{\varphi(n)}(c_{\varphi(n)}z + d_{\varphi(n)}) = c_{\varphi(n)}d_{\varphi(n)} + o(c_{\varphi(n)}d_{\varphi(n)})$ donc tend vers l'infini, ainsi $h_{\varphi(n)}(z)$ tend encore vers 0.

(j) Supposons que la suite $-d_n/c_n$ converge vers l. Alors, pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ différent de l, la suite $h_n(z)$ tend vers 0 d'après la question précédente, et on est donc dans le cas (b) si la suite ne converge pas en l, et si elle converge en l, on est dans le cas (b) ou (d) suivant la valeur de la limite.

Inversement, supposons que la suite $-d_n/c_n$ diverge. Elle admet alors au moins deux valeurs d'adhérence dans $\widehat{\mathbb{C}}$, que l'on note l_1 et l_2, et on définit φ et ψ des extractrices convenables. Pour tout $z \in \widehat{\mathbb{C}}$, si $h_n(z)$ converge et $z \neq l_1$, elle tend vers 0 car $h_{\varphi(n)}(z)$ tend vers 0 d'après le (i), et de même pour l_2. Ainsi, partout où $h_n(z)$ converge, comme $z \neq l_1$ ou $z \neq l_2$, elle converge vers 0. Ainsi, la limite de $h_n(z)$, quand elle existe, est forcément 0 : on est dans le cas (b). $\square$