Fractions continues
Corrigé de l'exercice 5 du TD 1

On reprend les notations de l'énoncé de l'exercice 5, à savoir sauf mention contraire : α un réel, a/b une approximation optimale de second type de α. En cas de doute sur certaines inégalités et comparaisons, je conseille de systématiquement visualiser les suites adjacentes paires et impaires des convergentes et α leur limite pour les comprendre.

(a) Soit $c/d \neq a/b$ une fraction avec $d \leq b$. Comme a/b est une approximation optimale de second type pour α, $|b\alpha - a| < |d\alpha - c|$ donc

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b}\,|d\alpha - c| \leq \frac{1}{d}|d\alpha - c| \leq \left|\alpha - \frac{c}{d}\right|$$

car $d \leq b$. Ainsi, a/b est aussi une approximation optimale de premier type pour α.

La réciproque est fausse : considérons $\alpha = 1/3$ et $a/b = 1/5$. On voit immédiatement que a/b est une approximation optimale de premier type, mais en second type $0 = 0/1$ approche mieux α que $1/5$: en effet $|1\alpha - 0| = 1/3 < |5\alpha - 1| = 2/3$.

(b) Supposons que $a/b < a_0$. Alors, on a $a/b < a_0 \leq \alpha$ donc $|\alpha - a_0/1| < |\alpha - a/b|$, ce qui est impossible car a/b est optimale de premier type d'après le (a), donc $a_0 \leq a/b$. Supposons maintenant que $a/b > p_1/q_1$. On a donc $\alpha \leq p_1/q_1 < a/b$. Dans ce cas de figure, on a

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| > \left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bq_1}, \quad \text{donc} \quad |b\alpha - a| > \frac{1}{q_1}$$

Or, comme $a_0 \leq \alpha \leq p_1/q_1 = a_0 + 1/a_1$, on sait que $|1 \cdot \alpha - a_0| \leq 1/q_1$. En second type, a_0 approxime donc mieux α que a/b, ce qui est exclu par hypothèse sur a/b, donc $a/b \leq p_1/q_1$.

(c) Nous savons maintenant que a/b appartient à l'intervalle $[a_0, p_1/q_1]$, et nous allons maintenant supposons que ce n'est pas une convergente de α. Il existe donc un entier $n \geq 1$ tel que a/b est strictement entre p_{n-1}/q_{n-1} et p_{n+1}/q_{n+1}. Alors, on peut écrire

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| \geq \frac{1}{bq_{n-1}}$$

mais d'un autre côté,

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

(penser au dessin, et utiliser l'inégalité (corrigée, il faut lire $n+1$ et pas $n-1$ en indice de q) de l'exercice 3 (e)).

Ces deux inégalités prouvent donc que $b > q_n$. Maintenant, on peut également écrire

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bq_{n+1}}$$

d'où $|b\alpha - a| \geq 1/q_{n+1}$, mais alors a/b approxime moins bien α en second type que p_n/q_n : en effet,

$$|q_n\alpha - p_n| = q_n\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq q_n\left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \leq \frac{1}{q_{n+1}}.$$

Ceci contradit l'hypothèse sur a/b, donc a/b est une convergente, ce qui conclut la preuve de la première partie.

(d) La distance minimale d'un réel à un entier est au plus $1/2$, et deux entiers distincts la réalisent si et seulement si ce réel est un demi-entier et ces entiers sont consécutifs, ce qui prouve cette question. De plus, on sait que dans ce cas $|y_0\alpha - x| = |y_0\alpha - x'| = 1/2$.

(e) Montrons que $x+x'$ et $2y_0$ sont premiers entre eux. Tout d'abord, le numérateur est impair (car x et x' sont consécutifs) et le dénominateur est pair, il reste donc à étudier le cas d'un diviseur commun impair ℓ tel que $x+x' = \ell p$ et $2y_0 = lq$. Alors, on aurait $|q\alpha - p| = 0$ donc un minimum pour f avec $q < y_0$, ce qui contredit la définition de y_0. Ainsi, $x + x'$ et $2y_0$ sont premiers entre eux.

Comme α est rationnel sous l'hypothèse de départ du (d), on l'obtient en un nombre fini d'étapes comme une convergente p_m/q_m. Les deux fractions étant sous forme irréductible, on a donc $p_m = x + x'$ et $q_m = 2y_0$. Si $m \geq 2$, comme $q_m = a_m q_{m-1} + q_{m-2}$, avec $a_m \geq 2$ (sinon le développement en fraction continue se poursuivrait), on a $q_{m-1} < y_0$, mais d'un autre côté

$$|q_{m-1}\alpha - p_{m-1}| = \frac{1}{q_m} = \frac{1}{2y_0} \leq \frac{1}{2} = |y_0\alpha - x|.$$

Par hypothèse sur y_0, ce cas est impossible donc $m = 1$, et alors $q_m = q_1 = a_1$. Les mêmes inégalités que ci-dessus se vérifient, ce qui impose que $q_0 \geq y_0$ par définition de y_0, mais $q_0 = 1$ donc $y_0 = 1$, et α est un demi-entier.

Pour résumer, dans le cas où il existe plusieurs entiers x tels que $f(x, y_0)$ est le minimum de la fonction f, on a nécessairement $\alpha = a_0 + 1/2$ et $y_0 = 1$.

On écarte cette situation pour la suite.

(f) On sait maintenant qu'il existe un unique x_0 tel que $f(x_0, y_0)$ est un minimum de f. En conséquence, pour tout couple (a, b) d'entiers avec $1 \leq b \leq y_0$, $f(a, b) > f(x_0, y_0)$ à moins que $(a, b) = (x_0, y_0)$. Ceci signifie exactement que x_0/y_0 est une approximation optimale de second type pour α par définition de f. On en déduit d'après la première partie de l'exercice que pour un certain $m \leq n$, $p_m/q_m = x_0/y_0$, avec $m \leq n$ car $q_m < q_n$, mais il reste à prouver que $m = n$ pour assurer que p_n/q_n est bien optimale de second type, ce qui est l'objectif des questions (d) à (g).

(g) Supposons que $m < n$. Alors, avec les estimations de l'exercice 4,

$$|q_m\alpha - p_m| > \frac{1}{q_m + q_{m+1}} \geq \frac{1}{q_{n-1} + q_n}, \quad |q_n\alpha - p_n| \leq \frac{1}{q_{n+1}}$$

mais par définition de x_0 et y_0, on doit avoir $|q_m\alpha - p_m| \leq |q_n\alpha - p_n|$ car (x_0, y_0) réalise un minimum sur tous les dénominateurs inférieurs à q_n, pas seulement ceux inférieurs à q_m. En combinant ces inégalités, on obtient

$$\frac{1}{q_{n-1} + q_n} < \frac{1}{q_{n+1}}$$

ce qui est impossible car $q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1}$.

On a donc $m = n$ et p_n/q_n est bien une meilleure approximation de second type pour α.