

TD N°3 : THÉORÈMES DE SYLOW

Exercice 1. [Normalisateur]

Soient G un groupe et H un sous-groupe de G .

1. Soit $N_G(H) = \{g \in G \mid H = gHg^{-1}\}$. Montrer que $N_G(H)$ est un sous-groupe de G contenant H .
2. Montrer que H est distingué dans $N_G(H)$, et que ce dernier est le plus grand sous-groupe de G ayant cette propriété.
3. Montrer que si $N_G(H)$ est d'indice fini k dans G (i.e. $|G/N_G(H)| = k$ est fini), alors le nombre de conjugués de H dans G est exactement k .
4. Supposons que G est fini et soit S un p -Sylow de G . Montrer que n_p , le nombre de p -Sylow de G , est égal à l'indice de $N_G(S)$ dans G . En particulier, si $|G| = p^a m$ avec $m \wedge p = 1$, montrer que $n_p \equiv 1 \pmod{p}$ et que $n_p \mid m$.

Tous les groupes sont désormais supposés finis.

Exercice 2. [Exemples de Sylow]

1. Soit p un nombre premier. Trouver tous les p -Sylow du groupe symétrique \mathcal{S}_p .
2. Montrer qu'il n'y a pas de groupe simple d'ordre 200.¹
3. Combien d'éléments d'ordre 5 y a-t-il dans un groupe d'ordre 20?
4. Trouver tous les sous-groupes de Sylow du groupe symétrique \mathcal{S}_3 et du groupe alterné \mathcal{A}_4 .
5. Soient G un groupe et p et q deux nombres premiers distincts. Montrer que l'intersection d'un p -Sylow de G avec un q -Sylow de G est triviale.
6. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et P_1 un p -Sylow de H . Montrer qu'il existe un p -Sylow P de G tel que $P_1 = P \cap H$.
7. Soient G un groupe et H un p -sous-groupe de G qui est distingué dans G . Montrer que H est contenu dans tout p -Sylow de G .
8. Soient G un groupe et N un sous-groupe distingué de G qui contient un p -Sylow de G . Montrer que N possède autant de p -Sylow que G .
9. (Argument de Frattini) Soient G un groupe, H un sous-groupe distingué de G et S un p -Sylow de H . Montrer que $G = N_G(S)H$.

Exercice 3. [Les Sylow et les sous-groupes distingués]

Soit G un groupe.

1. Soit S un p -Sylow de G . Démontrer l'équivalence des assertions suivantes :
 - (a) S est l'unique p -Sylow de G ;
 - (b) S est distingué dans G ;
 - (c) S est stable par tout automorphisme de G (on dit que S est un sous-groupe *caractéristique* de G).
2. Soit H un sous-groupe distingué de G . Montrer que tout sous-groupe de Sylow de H qui est distingué dans H est en fait un sous-groupe distingué dans G .
3. Soient H un sous-groupe distingué de G et S un p -Sylow de G . Montrer que $H \cap S$ est un p -Sylow de H et que SH/H est un p -Sylow de G/H .

1. Rappelons qu'un groupe est dit **simple** s'il ne contient aucun sous-groupe distingué propre non trivial.

4. Soient H un sous-groupe de G et S un p -Sylow de G . Montrer que $H \cap S$ n'est pas toujours un p -Sylow de H .
5. Soit S un p -Sylow de G .
 - (a) Montrer que si S' est un p -Sylow de G tel que $S' \subset N_G(S)$, alors $S = S'$.
 - (b) Montrer que $N_G(N_G(S)) = N_G(S)$.
6. Supposons que G possède un unique p -Sylow. Montrer que il en est de même pour tout sous-groupe et tout quotient de G .

Exercice 4. [Sur le groupe alterné]

1. Montrer que \mathcal{A}_n est engendré par les 3-cycles.
2. Déterminer les classes de conjugaison du groupe \mathcal{A}_5 . En déduire que celui-ci est simple.
3. Montrer que pour $n \geq 5$, les 3-cycles sont tous conjugués dans \mathcal{A}_n . En déduire que \mathcal{A}_n n'a pas de quotient abélien non trivial, et que le groupe dérivé de \mathcal{S}_n est isomorphe à \mathcal{A}_n .

Exercice 5. Soient p et q deux nombres premiers tels que $p < q$.

1. Montrer que tout groupe d'ordre pq possède un q -Sylow distingué.
2. Montrer que si de plus p ne divise pas $q - 1$, alors tout groupe d'ordre pq est cyclique.
3. Montrer que tout groupe d'ordre p^2q possède un sous-groupe de Sylow distingué.
4. Soit $r > q$ un nombre premier. Montrer que tout groupe d'ordre pqr possède un r -Sylow distingué.

Exercice 6. Soient G un p -groupe et H un sous-groupe distingué non trivial de G . Montrer que l'intersection de H avec le centre de G est non-trivial.

Exercice 7. [Applications du théorème de Sylow]

1. Soit G un groupe d'ordre 12. Montrer que soit G possède un 3-Sylow distingué, soit G est isomorphe au groupe alterné \mathcal{A}_4 .
2. Soit G un groupe d'ordre 56. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
3. Soit G un groupe d'ordre 105. Montrer que G possède soit un 5-Sylow distingué soit un 7-Sylow distingué.
4. Soit G un groupe d'ordre 351. Montrer que G possède un sous-groupe de Sylow distingué.
5. Soit G un groupe d'ordre 340. Montrer que G possède un sous-groupe cyclique distingué d'ordre 85.
6. Soit G un groupe d'ordre 48. Montrer que G possède un sous-groupe distingué d'ordre 8 ou 16.
7. Soit G un groupe simple d'ordre 168. Calculer le nombre d'éléments d'ordre 7.

Exercice 8. Soit G un groupe simple d'ordre 60.

1. Montrer que tout sous-groupe propre de G est d'indice ≥ 5 dans G .
Indication : si H est un sous-groupe de G , considérer l'action de G sur G/H .
2. Montrer que le nombre de 2-Sylow dans G vaut 5 ou 15.
3. Supposons que G possède exactement 15 2-Sylow. Montrer que G possède deux 2-Sylow d'intersection non triviale H . Montrer que $N_H(G)$ est d'indice 5 dans G .
4. Montrer que dans tous les cas G possède un sous-groupe d'indice 5. En déduire que G est isomorphe à \mathcal{A}_5 .

Exercice 9. [Marathon]

Trouver tous les groupes simples de cardinal ≤ 100 .