

FEUILLE D'EXERCICES  
REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES

**Exercice 1.** Soit  $G$  un groupe abélien fini, on note  $\widehat{G} = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$ .

- (a) Montrer que  $\widehat{\widehat{G}} \simeq G$ . Est-ce toujours vrai lorsque  $G$  n'est pas abélien ?
- (b) Montrer que  $\widehat{\widehat{G}}$  est canoniquement isomorphe à  $G$ .

**Exercice 2** (Tables de caractères de petits groupes).

- (a) Calculer la table de caractères de  $\mathfrak{A}_4$ .
- (b) Soit  $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  le groupe des quaternions, avec les relations

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k.$$

Calculer ses classes de conjugaison et sa table de caractères.

(c) Soit  $D_{2n}$  le groupe diédral, c'est-à-dire le groupe des isométries du  $n$ -gone régulier. On choisit  $s$  une symétrie de  $D_{2n}$  et  $r$  la rotation d'angle  $2\pi/n$ , démontrer que  $r$  et  $s$  engendrent  $D_{2n}$ , et que  $sr s^{-1} = r^{-1}$ .

(d) Donner les classes de conjugaison de  $D_{2n}$ , en distinguant les cas où  $n$  est pair et impair.

(d) Calculer la table de caractères de  $D_{2n}$ , en distinguant encore ces cas. Que peut-on dire de celle de  $D_8$  ?

**Exercice 3** (Table des caractères de  $\mathfrak{A}_5$ ).

(a) Calculer les classes de conjugaison de  $\mathfrak{A}_5$ . En déduire que celui-ci a 5 représentations irréductibles distinctes.

(b) Calculer les lignes de la table correspondant aux caractères triviaux et standard. Démontrer que les dimensions des représentations irréductibles restantes sont 3, 3 et 5, dont on note les caractères  $\chi_3, \chi'_3$  et  $\chi_5$ .

(c) Calculer le caractère de la représentation associée à l'action de  $\mathfrak{A}_5$  sur les paires d'éléments de  $\{1, \dots, 5\}$ . En déduire les valeurs de  $\chi_5$ .

(d) Utiliser l'orthogonalité des caractères pour compléter la table.

**Exercice 4.** Montrer que si  $H$  est un sous-groupe commutatif de  $G$ , toute représentation irréductible de  $G$  est de cardinal au plus  $[G : H]$ .

**Exercice 5** (Représentations fidèles). Une représentation  $(V, \rho)$  de  $G$  est dite fidèle si le morphisme  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est injectif.

(a) Exhiber une représentation fidèle de  $G$ .

(b) Montrer que pour le groupe des permutations  $\mathfrak{S}_n$ , la représentation standard est irréductible.

(c) Montrer que si  $G$  est simple, toute représentation non triviale est fidèle.

(d) Montrer que tout sous-groupe distingué de  $G$  est une intersection de noyaux de représentations irréductibles.

(e) En déduire que si toute représentation irréductible non triviale de  $G$  est fidèle, le groupe  $G$  est simple.

(f) En déduire que  $G$  est simple si et seulement si  $\chi(g) \neq \chi(1)$  pour tout  $g$  non trivial et tout caractère irréductible  $\chi$  non trivial de  $G$ .

(g) En pratique, comment lire rapidement les sous-groupes distingués de  $G$  avec sa table de caractères ?

**Exercice 6** (Représentations irréductibles de  $\mathfrak{S}_n$ ).

Soit  $n \geq 1$  un entier, on note  $\zeta_n = e^{2i\pi/n}$ .

(a) Montrer que les automorphismes de  $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$  sont déterminés par leur image de  $\zeta_n$ . En déduire que le groupe  $G$  des automorphismes de  $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$  s'identifie à  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$  et est donc de cardinal  $\varphi(n)$ .

(b) Montrer que l'extension  $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}(\zeta_n)^G$  est de degré  $\varphi(n)$ , en déduire que  $\mathbb{Q}(\zeta_n)^G = \mathbb{Q}$ .

(c) Montrer que pour tout  $g \in \mathfrak{S}_n$ ,  $g$  est conjugué à son inverse. En déduire que tous les caractères de représentation de  $\mathfrak{S}_n$  sont à valeurs réelles. Est-ce le cas pour  $\mathfrak{A}_n$  ?

(d) Montrer que pour tout  $g \in \mathfrak{S}_n$ ,  $g$  est conjugué à  $g^k$  dès que  $k$  est premier à l'ordre de  $g$ . En déduire que pour tout caractère  $\chi$  de  $\mathfrak{S}_n$ , on a  $\chi(g) = \chi(g^k)$  avec les mêmes notations.

(e) Soit  $g \in \mathfrak{S}_n$  d'ordre  $m$ . Montrer que  $\chi(g)$  est une somme de racines  $m$ -ièmes de l'unité, donc un entier algébrique. Pour  $k$  premier à  $m$  et  $\phi_k$  l'automorphisme de  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  défini par  $\phi_k(\zeta_m) = \zeta_m^k$ , montrer que

$$\phi_k(\chi(g)) = \chi(g^k).$$

En déduire que  $\chi(g)$  est invariant par tout automorphisme de  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ .

(f) En conclure que les caractères de représentations de  $\mathfrak{S}_n$  sont toujours à valeurs entières.

**Exercice 7** (Algèbres de groupe). La  $R$ -algèbre d'un groupe  $G$  sur un anneau commutatif  $R$  est le  $R$ -module libre de base  $(e_g)_{g \in G}$  muni de la multiplication

$$\left( \sum_{g \in G} \lambda_g e_g \right) \left( \sum_{h \in G} \mu_h e_h \right) = \sum_{g, h \in G} \lambda_g \mu_h e_{gh}.$$

(a) Montrer qu'une représentation  $k$ -linéaire de  $G$  est exactement un  $k[G]$ -module.

(b) Montrer que le centre de  $R[G]$  est le  $R$ -module libre engendré par les  $\sum_{g \in C} e_g$  avec  $C$  une classe de conjugaison de  $G$ .

(c) Prouver que pour toute classe de conjugaison  $C$  et toute représentation complexe irréductible  $V$ , l'application  $\phi_C = \sum_{g \in C} g$  est une homothétie de rapport  $\lambda_C$ , où  $\lambda_C$  est un entier algébrique.

(d) En déduire que la dimension d'une représentation complexe  $V$  divise l'ordre de  $G$  si  $V$  est irréductible.

**Exercice 8** (Dimensions des représentations irréductibles).

Cet exercice a pour but d'améliorer le résultat final de l'exercice précédent. On considère  $G$  un groupe fini.

(a) Soit  $(V, \rho)$  une représentation irréductible complexe de  $G$ . Montrer que pour tout  $c \in Z(G)$ ,  $\rho(c)$  est une homothétie. On note son rapport  $\lambda_c$ .

(b) Pour tout  $m \geq 1$ , on note  $\rho^{\otimes m}$  la représentation de  $G^m$  sur  $V^{\otimes m}$  définie par

$$(g_1, \dots, g_m) \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_m) := (g_1 \cdot v_1) \otimes \dots \otimes (g_m \cdot v_m).$$

Donner le caractère de cette représentation de  $G^m$ , et en déduire qu'elle est irréductible.

(c) Si  $(c_1, \dots, c_m) \in Z(G)^m$ , montrer que  $\rho^{\otimes m}(c_1, \dots, c_m)$  est une homothétie de rapport  $\lambda_{c_1} \dots \lambda_{c_m}$ . En déduire une représentation irréductible de  $G^m/H$ , où  $H$  est le sous-groupe de  $Z(G)^m$  constitué des  $m$ -uplets de produit égal à 1.

(d) Déduire de la question précédente et de l'exercice 6 que  $(\dim V)^m$  divise  $|G|^m/|Z(G)|^{m-1}$  pour tout  $m \geq 1$ .

(e) En déduire que la dimension de  $V$  divise  $[G : Z(G)]$ .

**Exercice 9.**

Soit  $G$  un groupe fini et  $H$  un sous-groupe strict non trivial de  $G$ .

(a) Montrer qu'on a toujours

$$\left| \bigcup_{g \in G} gHg^{-1} \right| \leq |G| - [G : H] + 1.$$

Si cette inégalité est vérifiée, on dit que  $(G, H)$  est un *couple de Frobenius*.

(b) Montrer que  $(G, H)$  est de Frobenius si et seulement si  $gHg^{-1} \cap g'H(g')^{-1} = \{1\}$  à moins que  $gH = g'H$ .

(c) Si  $H$  et  $N$  sont deux groupes finis non triviaux et que  $H$  agit sur  $N$  par automorphismes de groupes, considérons le produit semi-direct induit  $G = N \rtimes H$ . Montrer que  $(G, H)$  est un couple de Frobenius si et seulement si, pour tous  $(h, n) \in H \times N$ ,  $h \cdot n \neq n$  sauf si  $h = 1$  ou  $n = 1$  (c'est-à-dire que  $H$  agit librement sur  $N \setminus \{1\}$ ).

On suppose désormais que  $(G, H)$  est un couple de Frobenius.

(d) Posons

$$N = (G \setminus \bigcup_{g \in G} gHg^{-1}) \cup \{1\}.$$

Montrer que cet ensemble est stable par conjugaison, et de cardinal  $[G : H]$ .

(e) Pour toute fonction centrale  $\alpha$  sur  $H$ , montrer qu'il existe une fonction centrale  $\tilde{\alpha}$  sur  $G$  et une seule, prolongeant  $\alpha$  et constante sur  $N$ .

(f) Montrer avec les notations habituelles de produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$  que pour toute fonction centrale  $\beta$  sur  $G$ ,

$$\langle \tilde{\alpha}, \beta \rangle_G = \langle \alpha, \beta|_H \rangle_H + \alpha(1)(\langle 1, \beta \rangle_G - \langle 1, \beta|_H \rangle_H)$$

En déduire que l'application  $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$  est une isométrie de  $\mathcal{C}(H)$  vers  $\mathcal{C}(G)$ .

(g) Si  $\chi$  est un caractère de représentation de  $H$  et  $\beta$  un caractère de  $G$ , montrer que  $\langle \tilde{\chi}, \beta \rangle_G$  est entier. En déduire que  $\tilde{\chi}$  est un caractère de représentation de  $G$ .

(h) En fixant une représentation fidèle  $\rho$  de  $H$  (par exemple la représentation régulière) et  $\chi$  son caractère, en déduire que  $N$  est le noyau d'une représentation de  $G$ , en particulier un sous-groupe de  $G$ .

### Exercice 10.

Soit  $V$  une représentation fidèle de  $G$  de caractère  $\chi$  et  $\phi$  un caractère irréductible de  $G$ .

(a) Montrer que la seule classe de conjugaison  $C$  de  $G$  pour laquelle  $\chi(C) = \dim V$  est  $C = \{e\}$ .

(b) Ecrire le produit scalaire  $\langle \phi, \chi^n \rangle$  en fonction des classes de conjugaison de  $G$ . En déduire une expression de la série génératrice  $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle \phi, \chi^n \rangle T^n$ .

(c) Montrer qu'il existe  $n$  tel que la représentation irréductible de caractère  $\phi$  est une sous-représentation de  $V^{\otimes n}$ .

### Exercice 11 (Transformée de Fourier discrète, version théorique).

Soit  $G$  un groupe abélien fini, on note  $\mathcal{F}(G)$  l'espace vectoriel des fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , muni du produit scalaire

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\phi(g)} \psi(g).$$

(a) Montrer que  $\mathcal{F}(G)$  est une représentation de  $G$ , avec une  $G$ -structure préservée par le produit scalaire.

(b) On définit, pour tout  $\phi \in \mathcal{F}(G)$ ,  $\widehat{\phi}$  sur  $\mathcal{F}(\widehat{G})$  par  $\widehat{\phi}(\chi) = \langle \chi, \phi \rangle$ .

Montrer que  $\phi \mapsto \widehat{\phi}$  est un isomorphisme de  $G$ -représentations pour une structure de représentation sur  $\mathcal{F}(\widehat{G})$  à expliciter.

(c) On définit le produit de convolution de  $\phi$  et  $\psi$  par la formule

$$\phi * \psi(g) = \sum_{\substack{h, k \in G \\ h+k=g}} \phi(h)\psi(k).$$

Montrer que  $\widehat{\phi * \psi} = |G| \widehat{\phi} \widehat{\psi}$ .

**Exercice 12** (Transformée de Fourier discrète, version pratique).

On suppose ici que  $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

(a) Avec l'identification canonique entre  $\widehat{G}$  et le groupe des racines  $n$ -ièmes de l'unité, donner explicitement la transformée de Fourier discrète d'une fonction  $\phi$ .

(b) Calculer la transformée de Fourier discrète de  $\phi$  pour  $\phi$  constante, et  $\phi(\bar{k}) = a^k$  pour  $k \in [0, n-1]$ .

(c) Donner la transformée de Fourier discrète d'un signal translaté de  $\phi$  en fonction de celle de  $\phi$ .

(d) Soient  $P$  et  $Q$  des polynômes de degré au plus  $n/2 - 1$  à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On leur associe les fonctions  $\phi_P, \phi_Q$  données par la suite de leurs coefficients (complétée par 0 au-delà de leur degré). Quelle est l'interprétation de la transformée de Fourier discrète de  $\phi_P, \phi_Q$  en fonction de  $P$  et  $Q$  avec le (a)?

(e) En déduire une méthode pour calculer  $P \cdot Q$ .

**Exercice 13** (Transformée de Fourier rapide).

On suppose ici  $G = \mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ . On note  $\zeta = e^{2i\pi/2^n}$  et  $\chi_j$  le caractère de  $G$  défini par  $\chi_j(k) = \zeta^k$ .

On pose  $H = 2\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z}$ , et pour tout caractère  $\chi$  sur  $G$ , on note  $\widetilde{\chi}$  sa restriction à  $H$ .

(a) Soit  $f \in \mathcal{F}(G)$ , on note  $f_0 = f|_H$  et  $f_1$  la fonction définie sur  $H$  par  $f_1(k) = f(k+1)$ . Montrer que pour tout  $\chi_j$ ,

$$\widehat{f}(\chi_j) = \frac{1}{2} \left( \widehat{f_0}(\widetilde{\chi_j}) + \zeta^{-j} \widehat{f_1}(\widetilde{\chi_j}) \right).$$

(b) Si  $j \geq 2^{n-1}$  et  $k = j - 2^{n-1}$ , montrer que

$$\widehat{f}(\chi_j) = \frac{1}{2} \left( \widehat{f_0}(\widetilde{\chi_k}) - \zeta^{-k} \widehat{f_1}(\widetilde{\chi_k}) \right).$$

(c) En déduire une méthode efficace pour calculer  $\widehat{f}(\chi_j)$  pour tout  $j$ . Évaluer sa complexité.