

FORMES QUADRATIQUES

Dans les exercices concernés,  $q$  est une forme quadratique sur le  $K$ -espace vectoriel  $E$ .

**Exercice 1.** [Calculs explicites]

(a) Décomposer suivant l'algorithme de Gauss les formes quadratiques suivantes :

1.  $q(x, y, z) = xy + xz + yz$  sur  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2) + xt + xz + zt$  sur  $\mathbb{R}^4$ .
3. La forme quadratique déterminant sur  $M_2(\mathbb{R})$ .

(b) Donner les signatures et rangs des formes quadratiques suivantes sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel :

1.  $M \mapsto \text{Tr}(M^2)$  sur  $M_n(\mathbb{R})$ .
2.  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i < j} x_i x_j$ .

**Exercice 2.** [Cône isotrope]

On note  $C(q)$ , appelé cône isotrope, l'ensemble des vecteurs isotropes de  $q$ .

- (a) Montrer que  $C(q)$  est stable par multiplication scalaire et que  $\text{Ker } q \subset C(q)$ .
- (b) Si  $C(q) \neq \text{Ker } q$ , montrer que  $q$  est surjective dans  $K$ . Donner ensuite un contre-exemple.
- (c) Montrer que si  $q$  est non dégénérée et  $F$  ne contient pas de vecteur isotrope non nul, alors  $F \oplus F^\perp = E$ .
- (d) Montrer que si  $C(q) \neq \{0\}$  et  $q$  est non dégénérée, alors  $\text{Vect}(C(q)) = E$ .

**Exercice 3.** Soient deux vecteurs anisotropes distincts  $x, y$  de  $E$  tels que  $q(x) = q(y)$ .

- (a) Montrer qu'il existe au plus une réflexion de  $E$  envoyant  $x$  sur  $y$ .
- (b) Montrer qu'il existe une réflexion ou une composée de deux réflexions envoyant  $x$  sur  $y$  (indice : montrer que  $x - y$  ou  $x + y$  est anisotrope).
- (c) En déduire les orbites de  $E \setminus C(q)$  sous l'action de  $O(q)$ .

**Exercice 4.** [Plans hyperboliques] On dit que  $E$  est un plan hyperbolique si  $\dim E = 2$  et qu'il existe une base  $(e_1, e_2)$  de  $E$  (dite hyperbolique) dans laquelle la matrice de  $q$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- (a) Montrer que dans un plan hyperbolique, tout vecteur isotrope se complète en une base hyperbolique.
- (b) Montrer que pour  $E$  de dimension 2,  $q$  est soit dégénérée, soit anisotrope, soit hyperbolique.
- (c) Montrer que pour  $E$  de dimension au moins 2 et  $q$  non dégénérée, si  $x \in E$  est isotrope, il est contenu dans un plan  $P$  tel que  $q|_P$  est hyperbolique.

**Exercice 5.** [SETI et SETIM] Un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est dit totalement isotrope (SETI) si chacun de ses vecteurs est isotrope. Un tel espace maximal pour l'inclusion est dit SETIM. On note  $\nu(q)$  la dimension maximale d'un SETI.

- (a) Montrer que  $F$  est un SETI si et seulement si  $F \subset F^\perp$ .
- (b) Montrer que si  $F$  est un SETI,

$$\dim F + \dim F^\perp = \dim E + \dim(F \cap \text{Ker } B_q).$$

En déduire que  $\nu(q) \leq \dim E - \text{rg } q/2$ .

(c) Soient  $F_1$  et  $F_2$  deux SETIM et  $F = F_1 \cap F_2$ . Soient des espaces vectoriels  $G_1$  et  $G_2$  tels que  $F \oplus G_1 = F_1$  et  $F \oplus G_2 = F_2$ . Montrer que  $G_1 \cap G_2^\perp = G_2 \cap G_1^\perp = 0$ , et en déduire que les SETIM ont tous même dimension.

(d) Donner cette dimension dans le cas  $K = \mathbb{R}$  et  $q$  de signature  $(p, q)$ .

**Exercice 6.** [Endomorphismes adjoints]

Soit  $\phi$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $E$ , et  $u$  un endomorphisme symétrique pour  $\phi$  sur  $E$ .

- (a) Quelle est la forme de la matrice de  $u$  dans une base de diagonalisation de  $\phi$ ?
- (b) Si  $F$  est un sous-espace stable de  $E$  pour  $u$ , montrer que  $F^\perp$  l'est aussi.
- (c) Réciproquement, pour un endomorphisme quelconque  $u$  de  $E$  stabilisant  $F$  et  $F^\perp$ , si  $\phi$  n'a pas de vecteurs isotropes, montrer que  $u$  est symétrique si et seulement si  $u|_F$  et  $u|_{F^\perp}$  le sont.
- (d) En déduire que les symétries orthogonales sont toujours symétriques. Qu'en est-il des projecteurs orthogonaux?

**Exercice 7.** [Questions diverses]

(a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , le groupe  $SO_n(\mathbb{R})$  (muni de la topologie induite par la topologie d'espace vectoriel normé de  $M_n(\mathbb{R})$ ) est connexe par arcs.

(b) Montrer que, pour tout  $n \geq 3$ , le groupe  $SO_n(\mathbb{R})$  est engendré par les retournements, et que les retournements sont tous conjugués dans le groupe.

(c) Soit  $n$  et  $m$  deux entiers  $\geq 1$  différents. Montrer que les groupes  $O_n(\mathbb{R})$  et  $O_m(\mathbb{R})$  ne sont pas isomorphes. (*Indication* : on pourra dénombrer les classes de conjugaison d'éléments d'ordre 2.)

(d) Montrer que  $O_n(\mathbb{R})$  (resp.  $U_n(\mathbb{C})$ ) est un sous-groupe compact maximal de  $GL_n(\mathbb{R})$  (resp.  $GL_n(\mathbb{C})$ ).

(e) Montrer que l'application exponentielle induit une bijection de  $S_n(\mathbb{R})$  vers  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 8.** [Structure de  $SO_n(\mathbb{R})$ ]

1. Simplicité de  $SO_3(\mathbb{R})$ .

- (a) Déterminer le centre de  $O_n(\mathbb{R})$  et celui de  $SO_n(\mathbb{R})$ . On note  $PSO_n(\mathbb{R})$  le quotient de  $SO_n(\mathbb{R})$  par son centre.
- (b) Soit  $N \triangleleft SO_3(\mathbb{R})$  un sous-groupe distingué de  $SO_3(\mathbb{R})$  non réduit à  $\{\text{id}\}$ . Démontrer qu'il contient un élément  $u$  tel que  $-1 \leq \text{tr } u < 3$ .
- (c) En considérant les commutateurs de  $u$  et d'un élément de  $SO_3(\mathbb{R})$ , montrer qu'il existe  $t_0 < 3$  tel que pour tout  $t \in [t_0, 3]$ ,  $N$  contienne un élément de trace  $t$ .
- (d) En déduire que  $N$  contient un élément d'ordre (fini) pair, puis que  $N$  contient un retournement.
- (e) Conclure.

2. Simplicité de  $PSO_n(\mathbb{R})$ ,  $n \geq 5$ .

Dans la suite de l'exercice,  $n \geq 5$ .

- (a) Pour tout sous-espace vectoriel  $F \subset \mathbb{R}^n$ , on considère  $G_F = \{u \in SO_n(\mathbb{R}) \mid u|_F = \text{id}_F\}$ . À quoi  $G_F$  est-il isomorphe?
- (b) Soit  $u \in SO_n(\mathbb{R})$  différent de  $\pm \text{id}$ . Montrer qu'il existe un élément  $v \in SO_n(\mathbb{R})$  tel que le commutateur  $c = [u, v]$  soit différent de  $\pm \text{id}$  mais fixe un vecteur unitaire.
- (c) Démontrer qu'il existe  $w \in SO_n(\mathbb{R})$  tel que le commutateur  $[c, w]$  soit différent de  $\pm \text{id}$  mais fixe un sous-espace vectoriel de codimension  $\leq 2$ .
- (d) En déduire la liste des sous-groupes distingués de  $SO_n(\mathbb{R})$  et la simplicité de  $PSO_n(\mathbb{R})$ .

**Remarque.** Le groupe  $PSO_4(\mathbb{R})$  n'est pas simple : il est isomorphe à  $SO_3(\mathbb{R}) \times SO_3(\mathbb{R})$ .