Courbure des espaces hermitiens symétriques et rigidité des variétés hermitiennes localement symétriques

Rapport de stage

Louis-Clément Lefèvre
Master 1 mathématiques, École Normale Supérieure de Lyon

Stage effectué à l'Institut Élie Cartan, Nancy
Du 21 mai au 29 juin 2012
Sous la direction de Benoît Claudon

La Lorraine, terre de mathématiques...

Table des matières

Introduction

Considérons le problème suivant. Un tore complexe est un quotient $\mathbb{C}/\Gamma$ où Γ est un réseau de $\mathbb{C}$. C'est en particulier une variété complexe de dimension 1, ou surface de Riemann. Pour des choix de réseaux différents Γ, Γ' les tores $\mathbb{C}/\Gamma$ et $\mathbb{C}/\Gamma'$ sont toujours difféomorphes, c'est à dire isomorphes en tant que variétés différentiables. Cependant ils ne sont en général pas biholomorphes, c'est à dire isomorphes en tant que variétés complexes ! Il est bien connu (voir [Sik12]) que deux tores sont biholomorphes si et seulement si les réseaux Γ et Γ' sont dans la même orbite pour l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$. Autrement dit, en déformant le réseau Γ il est possible de déformer la structure complexe d'un tore. Les surfaces de Riemann compactes de genre $g \geq 2$ sont obtenues comme des quotients du disque B^1 et admettent elles aussi de nombreuses déformations.

L'objectif du stage est d'étudier le phénomène de déformation d'une variété complexe dans un cadre plus général, celui des variétés hermitiennes localement symétriques. En dimension supérieure à 2, il y a au contraire un phénomène de rigidité de la structure complexe.

Il faudra d'abord définir la notion de fonction holomorphe en plusieurs variables. Cela donne naturellement naissance à la notion de variété complexe. Puis on peut munir ces variétés de structures supplémentaires. De façon analogue à la géométrie riemannienne, on peut introduire une métrique compatible avec la structure complexe, ce qui donne les variétés hermitiennes. On introduira les variétés kählériennes, obtenues à partir des variétés hermitiennes en ajoutant une structure symplectique de façon compatible. Ces structures supplémentaires induisent des contraintes très fortes sur la cohomologie. On introduira les faisceaux et leur cohomologie. On définira précisément ce que signifie « déformer la structure complexe » et il faudra comprendre comment les déformations d'une variété complexe X sont paramétrées par le premier groupe de cohomologie de X à valeur dans le fibré tangent holomorphe, noté $H^1(X, \mathcal{T}_X)$. L'objectif sera ensuite de montrer l'annulation de ce groupe dans le cas de certaines variétés hermitiennes localement symétriques. On s'intéressera aux connexions et courbures sur les variétés. On se restreindra au cas de la boule unité B^n de $\mathbb{C}^n$, qui est symétrique et dont les quotients $X := B^n/\Gamma$ par un groupe d'isométries sont localement symétriques. En étudiant la courbure des fibrés vectoriels et les différentes notions de positivité des fibrés, on arrivera à montrer l'annulation de $H^1(X, \mathcal{T}_X)$.

Le but de ce rapport est de prouver le théorème suivant :

Théorème (Calabi-Vesentini [CV60] pour la boule B^n, ou espace de type $I_{n,1}$)**.** *Soit X une variété hermitienne localement symétrique compacte de dimension $n \geq 2$, obtenue comme un quotient $X = B^n/\Gamma$ de la boule unité ouverte B^n de $\mathbb{C}^n$ par un sous-groupe discret Γ du groupe $PU(1,n)$ des isométries biholomorphes de la boule B^n munie de la métrique de Bergman, qui agit proprement et librement. Alors le premier groupe de cohomologie de X à valeur dans le fibré tangent holomorphe $\mathcal{T}_X$ est nul, ce qui s'écrit*

$$H^1(X, \mathcal{T}_X) = 0.$$

Ceci implique qu'il n'y a pas de petites déformations de la structure complexe de X.

1 Fonctions holomorphes et variétés complexes

Dans les deux premières sections nous commençons par introduire ce dont nous avons besoin pour parler de géométrie complexe. La principale référence est le livre de Huybrechts [Huy04]. On trouvera des informations complémentaires dans [Voi02] et un autre point de vue dans [GH78].

1.1 Fonctions holomorphes

Nous allons commencer par étudier les fonctions holomorphes en plusieurs variables. Dans toute la suite U désigne un ouvert de $\mathbb{C}^n$ pour $n \geq 1$.

Définition 1.1.1 (Fonction holomorphe)**.** Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si f est $\mathcal{C}^\infty$ sur U et si sa différentielle $df(z) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in U$.

Une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeur dans $\mathbb{C}$ s'écrit $f := u + iv$ où u, v sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à valeur réelle. Notons $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$ les coordonnées sur $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^{2n}$. La $\mathbb{C}$-linéarité de la différentielle est équivalente aux *équations de Cauchy-Riemann* pour f :

$$\forall i, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial v}{\partial y_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y_i} = -\frac{\partial v}{\partial x_i}. \tag{1}$$

On n'aura jamais aucune raison de confondre le i complexe et le i en indice. En introduisant les opérateurs

$$\frac{\partial}{\partial z_i} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} - i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + i\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \tag{2}$$

les équations (1) se réécrivent

$$\forall i, \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} = 0.$$

On parle de fonction *anti-holomorphe* si $\bar{f}$ est holomorphe. On notera toujours un élément de $\mathbb{C}^n$ comme $z := (z_1, \ldots, z_n)$. On note $\varepsilon := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et on dit que $\varepsilon > 0$ si $\forall i$, $\varepsilon_i > 0$. Les analogues des boules ouvertes en dimension n sont les *polydisques.*

Définition 1.1.2 (Polydisque)**.** Le *polydisque* de centre $w \in \mathbb{C}^n$ et de rayon $\varepsilon > 0$ est $B_\varepsilon(w) := \{z \in \mathbb{C}^n, \forall i, |z_i - w_i| < \varepsilon_i\}$. Son adhérence est, en relâchant les notations, le *polydisque fermé* $\bar{B}_\varepsilon(w) := \{z, |z_i - w_i| \leq \varepsilon_i\} = \overline{B_\varepsilon(w)}$ et son bord (qui n'est pas le bord au sens topologique) est $\partial B_\varepsilon(w) := \{z, |z_i - w_i| = \varepsilon_i\}$.

Rappelons que pour une fonction f holomorphe d'une seule variable on a la *formule de Cauchy.* Si $B_\varepsilon(w)$ est une boule ouverte incluse dans U alors pour tout $z \in B_\varepsilon(w)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi. \tag{3}$$

Remarquons qu'une fonction holomorphe sur $U \subset \mathbb{C}^n$ est holomorphe par rapport à chaque variable.

Théorème 1.1.3 (Formule de Cauchy)**.** *Si f est continue sur un polydisque fermé $\bar{B}_\varepsilon(w) \subset \mathbb{C}^n$ et holomorphe par rapport à chaque variable sur $B_\varepsilon(w)$ alors pour tout $z \in B_\varepsilon(w)$*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial B_\varepsilon(w)} \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{(\xi_1 - z_1) \ldots (\xi_n - z_n)} \, d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule (3) par rapport à chaque variable. Comme f est continue sur l'adhérence, on peut intervertir les intégrales et les remplacer par une intégrale sur tout $\bar{B}_\varepsilon(w)$. □

Cette formule a deux conséquences immédiates.

Corollaire 1.1.4. *Toute fonction continue sur un ouvert et holomorphe par rapport à chaque variable est holomorphe.*

Dans la suite, les fonctions différentiables seront toujours supposées $\mathcal{C}^\infty$.

Corollaire 1.1.5 (Développement en série entière)**.** *La formule de Cauchy permet d'établir le développement en série entière pour f au voisinage de w sous la forme*

$$f(z) = \sum_{i_1, \ldots, i_n} \frac{1}{i_1!, \ldots, i_n!} \frac{\partial^{i_1 + \cdots + i_n} f}{\partial^{i_1} z_1 \ldots \partial^{i_n} z_n} (z_1 - w_1)^{i_1} \ldots (z_n - w_n)^{i_n}.$$

Nous allons maintenant nous intéresser aux fonctions à valeur dans $\mathbb{C}^m$. Une telle fonction s'écrit $f := (f_1, \ldots, f_m)$.

Définition 1.1.6 (Fonction holomorphe)**.** Une fonction $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ est dite *holomorphe* si les fonctions $f_1, \ldots, f_m$ sont holomorphes.

Soit maintenant $f : U \to \mathbb{C}^m$ une application différentiable. On note $z_1 = x_1 + iy_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n$ les coordonnées sur $U \subset \mathbb{C}^n$ et $r_1 + is_1, \ldots, r_m + is_m$ les coordonnées sur $\mathbb{C}^m$. Les fonctions coordonnées s'écrivent $f_1 = u_1 + iv_1, \ldots, f_m = u_m + iv_m$. Alors en z on a les bases (réordonnées) $(\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial y_1, \partial/\partial y_n)$ de $\mathbb{C}^n$, et en $f(z)$, $(\partial/\partial r_1, \ldots, \partial/\partial r_m, \partial/\partial s_1, \partial/\partial s_m)$ de $\mathbb{C}^m$. Dans ces bases la matrice de f (par blocs) est

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) & \left(\frac{\partial u_i}{\partial y_j}\right) \\ \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) & \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\right) \end{pmatrix}.$$

Il est plus pratique de considérer $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ et d'utiliser le produit tensoriel pour obtenir une application $\mathbb{C}$-linéaire $df(z)_\mathbb{C} : \mathbb{R}^{2n} \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{R}^{2m} \otimes \mathbb{C}$. On a des bases $\partial/\partial z_j, \partial/\partial \bar{z}_j$ sur $\mathbb{C}^n$ grâce aux opérateurs (2) vus comme éléments de $\mathbb{R}^{2n} \otimes \mathbb{C}$ et de même $\partial/\partial w_i, \partial/\partial \bar{w}_i$ sur $\mathbb{C}^m$. Dans ces bases la matrice de $df(z)_\mathbb{C}$ (par blocs) est

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right) & \left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j}\right) \\ \left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial z_j}\right) & \left(\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial \bar{z}_j}\right) \end{pmatrix}.$$

Si f est holomorphe on a

$$\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j} = 0 = \overline{\frac{\partial \bar{f}_i}{\partial z_j}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial \bar{z}_j} = \overline{\frac{\partial f_i}{\partial z_j}}.$$

Définition 1.1.7 (Jacobien complexe)**.** Pour $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ la matrice des

$$J_{\mathbb{C}}(f)(z) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(z)\right)$$

est appelé le *jacobien complexe* de f en z. En particulier si f est holomorphe, d'après l'écriture matricielle on a $|\det(J_{\mathbb{C}}(f))|^2 = \det(df)$ et $\det(df)$ est le jacobien réel.

Enfin on a des versions holomorphes des théorèmes des fonctions implicites, d'inversion locale et de linéarisation du rang. Les énoncés sont les mêmes que pour les réels et ils seront appliqués dans la proposition 1.2.6 pour parler de sous-variétés.

1.2 Variétés complexes

Pour fixer les notations, commençons par quelques rappels de géométrie réelle.

Définition 1.2.1 (Variété différentiable réelle)**.** Une *variété différentiable réelle* M de dimension n est la donnée d'un espace topologique séparé et à base dénombrable d'ouverts M, d'un recouvrement ouvert qu'on notera toujours (U_i) avec des homéomorphismes $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\simeq} \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ appelés *cartes*, tel que les applications qu'on notera toujours $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ appelées *changements de cartes* soient différentiables entre ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Pour parler des fonctions sur une variété, nous allons tout de suite introduire le vocabulaire des faisceaux (voir 2.3). On note $\mathcal{C}^\infty_M$ le faisceau des fontions $\mathcal{C}^\infty$ sur M. Cela signifie que pour tout ouvert $U \subset M$, $\mathcal{C}^\infty_M(U)$ représente l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur U. On confond le faisceau et l'ensemble de ses sections locales. Ainsi écrire $f \in \mathcal{C}^\infty_M$ signifie qu'on se donne un ouvert $U \subset M$ quelconque et une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty_M(U)$. On note $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}}$ le faiceau des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à valeur complexe sur M. Ces deux espaces ne sont pas fondamentalement différents car $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}} = \mathcal{C}^\infty_M \otimes \mathbb{C}$ (au sens des faisceaux, c'est à dire sur chaque ouvert).

Définition 1.2.2 (Variété complexe)**.** Une *variété complexe* X de dimension n est la donnée d'une variété différentiable X dont les cartes φ_i sont à valeur dans $\mathbb{C}^n$ et dont les changements de cartes φ_{ij} sont des applications holomorphes entre ouverts de $\mathbb{C}^n$.

En particulier une variété complexe de dimension n est une variété différentiable réelle orientée de dimension $2n$. Les cartes fournissent des coordonnées locales holomorphes et on peut se ramener localement à l'étude d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Nous n'introduirons pas l'espace tangent dans cette section car son étude est plus subtile que dans le cas réel. Cela n'empêche pas de parler de la différentielle d'une fonction holomorphe sur une variété complexe, en se ramenant à des cartes.

Définition 1.2.3 (Application holomorphe)**.** Soient X, Y des variétés complexes. Une application $f : X \to \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si pour toute carte (U_i, φ_i) sur X, l'application $f \circ \varphi_i^{-1}$ est holomorphe sur U_i. Une application $f : X \to Y$ est dite *holomorphe* si pour toutes cartes φ_i sur X et ψ_j sur Y l'application $\psi_j \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ est holomorphe. C'est un *biholomorphisme* si en plus f est bijective et f^{-1} est holomorphe.

Les biholomorphismes sont les isomorphismes de variétés complexes. On note $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X.

Proposition 1.2.4 (Fonctions holomorphes sur une variété compacte)**.** *Si X est une variété complexe connexe compacte alors $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{C}$ c'est à dire que les seules fonctions holomorphes sur tout X sont les fonctions constantes.*

Démonstration. Il ne s'agit que du principe du maximum et du prolongement analytique, qui restent valables avec n variables. Plus précisément si f est une fonction holomorphe sur X qui admet un maximum en z alors en coordonnées locales f admet un maximum en z par rapport à chaque variable. Donc f est constante au voisinage de z. Or on a encore unicité du prolongement analytique (par rapport à chaque variable, donc partout) puis par connexité f est constante sur X. □

Définition 1.2.5 (Sous-variété)**.** Une *sous-variété* de dimension $m \leq n$ de X est une partie $S \subset X$ telle que pour tout $z \in S$ il existe une carte centrée φ en z, définie sur un ouvert U, avec

$$\varphi(S \cap U) = \varphi(U) \cap \{z,\, z_{m+1} = \cdots = z_n = 0\}.$$

Comme dans le cas réel, on a la caractérisation suivante des sous-variétés.

Proposition 1.2.6 (Caractérisation des sous-variétés)**.** *Si $f : X \to Y$ est une fonction holomorphe entre variétés complexes et si $c \in Y$ est tel que pour tout $z \in X$, si $f(z) = c$ alors $df(z)$ est surjective, alors $f^{-1}(c)$ est une sous-variété de X. Toute sous-variété s'écrit localement sous cette forme.*

Exemple 1.2.7. Donnons maintenant quelques exemples de variétés complexes.

- L'espace $\mathbb{C}^n$ et les ouverts $U \subset \mathbb{C}^n$ sont des variétés.
- L'*espace projectif complexe* $P^n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$. Il admet naturellement le recouvrement ouvert $U_i := \{[z_0 : \cdots : z_n],\, z_i \neq 0\}$ et les cartes

$$\varphi_i : [z_0 : \cdots : z_n] \in U_i \mapsto \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right)$$

  où $\widehat{z_i}$ signifie qu'on enlève le terme.
- Un quotient X/G d'une variété complexe X par un groupe discret de biholomorphismes G qui agit proprement et librement sur X a naturellement une structure de variété complexe. La projection $X \to X/G$ est un *revêtement holomorphe*.
- Un exemple simple de quotient est donné par les *tores complexes* $X := \mathbb{C}^n/\Gamma$ où Γ est un réseau de $\mathbb{C}^n$, c'est à dire un sous-groupe discret qui engendre $\mathbb{C}^n$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Dans les parties suivantes, on donnera d'autres exemples. On étudiera plus en détail les espaces tangents et on munira les variétés complexes de structures supplémentaires.

1.3 Espaces vectoriels complexes

Avant d'étudier les espaces tangents des variétés complexes, nous allons commencer par étudier les espaces vectoriels. Soit X une variété complexe de dimension n et $z \in X$. Elle a un espace tangent réel T_zX de dimension $2n$. Vu dans une carte, T_zX est un espace vectoriel complexe et les changements de cartes holomorphes préservent la multiplication par i. En fait il apparaîtra beaucoup plus pratique de voir T_zX comme un espace vectoriel réel et de voir la multiplication par i comme un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire appelé structure presque-complexe. On va donc commencer par s'intéresser aux espaces vectoriels presque-complexes.

Dans toute cette partie on note V un espace vectoriel réel de dimension paire $d = 2n$.

Définition 1.3.1 (Structure presque-complexe)**.** Une *structure presque-complexe* sur V est la donnée d'un endomorphisme I de V tel que $I^2 = -\operatorname{id}$.

Un tel endomorphisme ne peut exister qu'en dimension paire. Il donne naturellement naissance à une structure d'espace complexe sur V en posant, pour $a, b \in \mathbb{R}$, $(a + bi).v = av + bI(v)$. On note (V, I) l'espace V vu comme espace complexe. Cependant on ne peut pas parler de parties réelles et imaginaires, ni de conjugaison sur V. On introduit le complexifié $V_\mathbb{C} := V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$. On rappelle que V s'inclut dans $V_\mathbb{C}$ par $v \mapsto v \otimes 1$ et qu'une application linéaire $f : V \to V$ induit une application $\mathbb{C}$-linéaire $f_\mathbb{C} : V_\mathbb{C} \to V_\mathbb{C}$ en posant $f_\mathbb{C}(v \otimes \lambda) = f(v) \otimes \lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Enfin on peut définir la *conjugaison* sur $V_\mathbb{C}$ par $\overline{v \otimes \lambda} = v \otimes \bar{\lambda}$.

L'endomorphisme I a aussi une extension $\mathbb{C}$-linéaire à $V_\mathbb{C}$ et comme $I^2 = -\operatorname{id}$ il a deux valeurs propres $\pm i$. Ceci induit une décomposition de l'espace

$$V_\mathbb{C} := V^{1,0} \oplus V^{0,1}$$

où $V^{1,0} := \{v \in V_\mathbb{C},\, I(v) = iv\}$ et $V^{0,1} := \{v \in V_\mathbb{C},\, I(v) = -iv\}$, avec l'application

$$v \mapsto \frac{1}{2}(v - iI(v)) \oplus \frac{1}{2}(v + iI(v)) \tag{4}$$

et la conjugaison qui induit un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire entre ces deux espaces. La première application est un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $(V, I) \xrightarrow{\simeq} V^{1,0}$ et la seconde est un isomorphisme anti-$\mathbb{C}$-linéaire.

Tout élément v de $V_\mathbb{C}$ s'écrit $v = x + iy$ avec $x, y \in V$, et alors $\bar{v} = x - iy$. On peut toujours choisir une base de V sous la forme $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ avec $\forall k,\, y_k = I(x_k)$. On en déduit par l'application (4) une base naturelle $(z_k = (1/2)(x_k - iy_k))$ de $V^{1,0}$ et $(\bar{z}_k = (1/2)(x_k + iy_k))$ de $V^{0,1}$.

Le dual $V^* := \operatorname{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{C})$ de V admet aussi une structure presque complexe donnée par $I(f)(v) = f(I(v))$ pour $f \in V^*$ et $v \in V$. Et donc une décomposition en

$$\begin{aligned}(V^*)^{1,0} = (V^{1,0})^* &:= \{f \in \operatorname{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{C}),\, \forall v, f(I(v)) = if(v)\}\\ (V^*)^{0,1} = (V^{0,1})^* &:= \{f \in \operatorname{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{C}),\, \forall v, f(I(v)) = -if(v)\}\end{aligned}$$

avec un isomorphisme $(V^*)^{1,0} \simeq \operatorname{Hom}_\mathbb{C}((V, I), \mathbb{C})$.

Ces décompositions induisent des décompositions sur l'algèbre extérieure

$$\bigwedge^* V^* := \bigoplus_{k=0}^{(n=2d)} \bigwedge^k V^* \quad \text{et} \quad \bigwedge^* V^*_\mathbb{C} := \bigoplus_{k=0}^{(n=2d)} \bigwedge^k V^*_\mathbb{C} = \left(\bigwedge^* V^*\right) \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}. \tag{5}$$

Définition 1.3.2 (Formes de type (p,q))**.** On définit

$$\bigwedge^{p,q} V^* := \bigwedge^p (V^{1,0})^* \otimes_{\mathbb{C}} \bigwedge^q (V^{0,1})^*$$

qu'on appelle l'ensemble des *formes alternées de type* (ou *bidegré*) (p,q). On a naturellement une décomposition

$$\bigwedge^k V_{\mathbb{C}}^* = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} V^* \tag{6}$$

et le produit extérieur (étendu $\mathbb{C}$-linéairement) est une application $\bigwedge^{p,q} \times \bigwedge^{r,s} \to \bigwedge^{p+r,q+s}$.

On note Π^k la projection $\bigwedge^* \to \bigwedge^k$ et $\Pi^{p,q}$ la projection $\bigwedge^* V_{\mathbb{C}}^* \to \bigwedge^{p,q} V^*$. On se place maintenant dans le cas d'un espace euclidien $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Définition 1.3.3 (Structure compatible)**.** La structure presque complexe I est dite *compatible* avec le produit scalaire si

$$\forall v, w \in V, \quad \langle I(v), I(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

c'est à dire si I est une isométrie.

Il est facile d'étendre le produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en un produit hermitien (toujours anti-linéaire sur la deuxième variable) avec la complexification. On pose, pour $v, w \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\langle v \otimes \lambda, w \otimes \mu \rangle_{\mathbb{C}} := \lambda \bar{\mu} \langle v, w \rangle$. Alors $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ est un produit hermitien sur $V_{\mathbb{C}}$.

Un produit scalaire euclidien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V définit un produit scalaire sur toute l'algèbre extérieure de V^*. Considérons $(e_1, \ldots, e_d) := (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ une base orthonormée de V, et sa base duale $(e^1, \ldots, e^d)$. Alors il suffit de dire que les $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ forment une base orthonormée de $\bigwedge^k V^*$, pour tout k et pour toute suite croissante d'indices $i_1, \ldots, i_k$. La décomposition réelle (5) devient orthogonale. Sur $V_{\mathbb{C}}$ la base orthonormée pour $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ peut s'écrire $(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$. La base de $(V^{1,0})^*$ est formée des $(z^k = x^k + iy^k)$, celle de $(V^{0,1})^*$ est formée des $(\bar{z}^k = x^k - iy^k)$. Alors les termes $z^{i_1} \wedge \cdots \wedge z^{i_p} \wedge \bar{z}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \bar{z}^{i_q}$ forment une base orthonormée de $\bigwedge^{p,q} V^*$. La décomposition complexe (5) et la décomposition (6) deviennent orthogonales. Enfin on a la *forme volume* $\mathrm{vol} := e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$ sur V, qui s'étend à $V_{\mathbb{C}}$.

On remarque que les espace $\bigwedge^k V^*$ et $\bigwedge^{d-k} V^*$ sont de même dimension. Dans le cas complexe ce sont les espaces $\bigwedge^{p,q} V^*$ et $\bigwedge^{n-q,n-p} V^*$. Nous allons voir que l'existence d'un produit scalaire donne naissance à une dualité entre ces espaces.

Définition 1.3.4 (Étoile de Hodge)**.** L'opérateur *étoile de Hodge réel* (resp. *complexe*) est défini par :

$$\forall \alpha, \beta \in \bigwedge^* V^*, \quad \alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle . \mathrm{vol} \quad \left(\text{resp. } \forall \alpha, \beta \in \bigwedge^* V_{\mathbb{C}}^*, \quad \alpha \wedge *\bar{\beta} = \langle \alpha, \beta \rangle_{\mathbb{C}} . \mathrm{vol}\right)$$

où on utilise le fait que l'espace $\bigwedge^d$ est naturellement de dimension 1, proportionnel à vol.

C'est un opérateur linéaire qui induit un isomorphisme $\bigwedge^k V^* \simeq \bigwedge^{d-k} V^*$ (resp. $\bigwedge^{p,q} V^* \simeq \bigwedge^{n-q,n-p} V^*$). Il vérifie $*1 = \mathrm{vol}$, $*\,\mathrm{vol} = 1$, $*^2 = (-1)^k$ sur $\bigwedge^k$ (involutif au signe près) et enfin $\langle \alpha, *\beta \rangle = (-1)^k \langle *\alpha, \beta \rangle$ (autoadjoint au signe près).

2 Fibrés vectoriels et étude des variétés complexes

Nous allons continuer à étudier les variétés complexes pour introduire les outils de base.

2.1 Fibrés vectoriels

Nous allons donner des propriétés très générales des fibrés vectoriels, en commençant par le cas réel. On désignera toujours par M une variété différentiable réelle et par X une variété complexe.

Définition 2.1.1 (Fibré vectoriel)**.** Un *fibré vectoriel réel de rang* r sur M est la donnée d'une variété réelle E et d'une application $\pi : E \to M$ appelée *projection* qui vérifient les propriétés suivantes :
- Chaque fibre $\pi^{-1}(x)$ a une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension r.
- Il existe un recouvrement ouvert (U_i) de M et des difféomorphismes $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\simeq} U_i \times \mathbb{R}^r$ tels que $\mathrm{pr}_{U_i} \circ \varphi_i = \pi$ sur $\pi^{-1}(U_i)$, où pr est la projection. On dit que φ_i est une *trivialisation* de E sur U_i.
- L'application induite $\varphi_i(x) : \pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}^r$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

On note $E_x := \pi^{-1}(x)$ la *fibre* de x, et $E_{U_i} := \pi^{-1}(U_i)$. Le rang r étant localement constant, on se ramène toujours à l'étude d'une variété connexe. Les applications $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont définies sur et à valeur dans $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r$. On remarque qu'elles laissent fixe $U_i \cap U_j$ donc s'écrivent $(\mathrm{id}_{U_i \cap U_j}, \psi_{ij})$ où les $\psi_{ij}(x)$ sont des automorphismes linéaires de la fibre $E_x \simeq \mathbb{R}^r$, qu'on peut voir comme des matrices inversibles dont les coefficients sont des fonctions dans $\mathcal{C}^\infty_M(U_i \cap U_j)$. Ils sont appelés les *cocycles* associés au fibré vectoriel E. Un fibré vectoriel sur une variété connexe (ce qui sera souvent le cas) est entièrement décrit par ses cocycles. Dans la suite, les propriétés des fibrés seront énoncées à la fois pour les trivialisations et pour les cocycles.

Définition 2.1.2 (Fibré complexe)**.** Un *fibré vectoriel complexe* sur une variété réelle M est la donnée d'un fibré vectoriel E avec la projection π, comme dans la définition 2.1.1, tel que les fibres E_x sont des espaces vectoriels complexes, les trivialisations sont à valeur dans $\mathbb{C}^r$ et les applications $\varphi_i(x)$ sont $\mathbb{C}$-linéaires. En terme de cocycles, les (ψ_{ij}) sont des matrices à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}}(U_i \cap U_j)$.

Définition 2.1.3 (Fibré holomorphe)**.** Un fibré vectoriel E sur une variété complexe X est dit *holomorphe* si E est une variété complexe, si c'est un fibré complexe et si les trivialisations φ_i sont des biholomorphismes $E_{U_i} \xrightarrow{\simeq} U_i \times \mathbb{C}^r$. En terme de cocycles, les (ψ_{ij}) sont des matrices à coefficients dans $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$.

On a donc trois catégories de fibrés et il est pratique de raisonner avec des faisceaux (voir 2.3). Les résultats s'adaptent de façon évidente à chaque catégorie.

Définition 2.1.4 (Section)**.** Une *section* d'un fibré vectoriel E sur un ouvert U est une application $\mathcal{C}^\infty$ (resp. $\mathcal{C}^\infty_\mathbb{C}$, resp. holomorphe) $s : U \to E$ telle que $\pi \circ s = \mathrm{id}_U$ où π est la projection.

On notera $E(U)$ l'ensemble des sections de E au dessus d'un ouvert U. Quand on confond le fibré et le faisceau associé, on note E l'ensemble des sections sur un ouvert quelconque. On remarque que se donner une trivialisation d'un fibré de rang r au dessus d'un ouvert U est la même chose que se donner r sections linéairement indépendantes sur tout U.

Définition 2.1.5 (Morphisme de fibrés)**.** Soient E, F deux fibrés sur M (resp. X) avec les projections π_E, π_F. Une application $f : E \to F$ est un *morphisme de fibrés* si f est $\mathcal{C}^\infty$ (resp. $\mathcal{C}^\infty_\mathbb{C}$, resp. holomorphe) avec $\pi_F \circ f = \pi_E$, et si pour tout x, $f(x) : E_x \to F_x$ est $\mathbb{R}$-linéaire (resp. $\mathbb{C}$-linéaire).

Nous allons maintenant étudier différentes façons de construire des fibrés vectoriels. On dit que G est un *sous-fibré* de E de rang $r' \leq r$ si G est une sous-variété de E et pour tout x, G_x est un sous-espace vectoriel de E_x. Ceci équivaut à dire qu'on a des trivialisations

$$\varphi_i : G_{U_i} \xrightarrow{\simeq} U_i \times \mathbb{R}^{r'} \subset E_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{R}^r \quad \left(\text{resp. } \varphi_i : G_{U_i} \xrightarrow{\simeq} U_i \times \mathbb{C}^{r'} \subset E_{U_i} \simeq U_i \times \mathbb{C}^r\right).$$

Théorème 2.1.6 (Construction de fibrés)**.** *La plupart des constructions d'algèbre linéaire, que l'on sait faire sur chaque fibre, se font tout aussi facilement sur les fibrés.*

Pour illustrer ce théorème on se donne E, F des fibrés vectoriels, décrits par des cocycles ψ, ψ' (sur une intersection d'ouverts de trivialisation). Alors on a naturellement :

- Le *fibré somme* $E \oplus F$ de cocycles $(\psi \oplus \psi')$.
- Le *fibré produit tensoriel* $E \otimes F$ de cocycles $(\psi \otimes \psi')$.
- Le *fibré dual* E^* de cocycles $({}^t\psi^{-1})$ (où ^{t} est la transposition des matrices).
- Le *fibré des morphismes* $\mathrm{Hom}(E, F)$. On peut voir que $\mathrm{Hom}(E, F) \simeq E^* \otimes F$ pour se ramener aux cas précédents.

Enfin à tout fibré complexe E on peut associer le *fibré conjugué* $\bar{E}$ dont les cocycles sont les $(\bar{\psi})$. Si E est un fibré holomorphe, $\bar{E}$ devient un *fibré anti-holomorphe*.

2.2 Espace tangent et formes différentielles sur une variété complexe

Le but de cette partie est d'appliquer les résultats des deux parties précédentes. Les espaces tangents en chaque point ont été étudiés dans la partie 1.3. Toutes les propriétés deviennent en fait des propriétés sur les fibrés vectoriels, étudiés dans 2.1.

Soit X une variété complexe de dimension n, et (U_i, φ_i) des cartes holomorphes sur X à valeur dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^{2n}$.

Définition 2.2.1 (Fibré tangent réel)**.** Le *fibré tangent réel* de X, noté TX, est le fibré réel de dimension $2n$ décrit par les cocycles

$$(d(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \circ \varphi_j)$$

sur $U_i \cap U_j$.

Définition 2.2.2 (Fibré tangent holomorphe)**.** Le *fibré tangent holomorphe* de X, noté $\mathcal{T}_X$, est le fibré holomorphe de dimension complexe n décrit par les cocycles

$$(J_{\mathbb{C}}(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}) \circ \varphi_j)$$

sur $U_i \cap U_j$, où $J_{\mathbb{C}}$ est le jacobien complexe défini en 1.1.7.

On a déjà remarqué au début de la partie 1.3 que chaque fibre T_xX admet une structure presque-complexe I_x. En fait I_x donne un endomorphisme I du fibré vectoriel TX tel que $I^2 = -\operatorname{id}$, d'où on en déduit de nombreuses propriétés sur les fibrés tangents.

Le *fibré tangent complexifié* $T_{\mathbb{C}}X := TX \otimes \mathbb{C}$ admet la décomposition

$$T_{\mathbb{C}}X := T^{1,0}X \oplus T^{0,1}X$$

en un *fibré tangent holomorphe* $T^{1,0}X$ et un *fibré tangent anti-holomorphe* $T^{0,1}X$, avec la conjugaison $\overline{T^{1,0}X} = T^{0,1}X$. Dans des coordonnées locales (x_i, y_j) sur X, une base de TX est donnée par les $(\partial/\partial x_i, \partial/\partial y_j)$ avec $I(\partial/\partial x_i) = \partial/\partial y_i$. La base duale est donnée par les (dx_i, dy_j). On note $\partial/\partial z_i$ et $\partial/\partial \bar{z}_i$ comme dans la définition (2) de la partie 1.1. Une base de $T^{1,0}X$ est alors donnée par les $(\partial/\partial z_i)$ et une base de $T^{0,1}X$ est donnée par les $(\partial/\partial \bar{z}_i)$. Les bases duales sont formées par les $dz_i := dx_i + idy_i$ et $d\bar{z}_j := dx_j - idy_j$.

Proposition 2.2.3 (Fibré tangent holomorphe)**.** *Le fibré tangent holomorphe $\mathcal{T}_X$ est isomorphe au fibré $T^{1,0}X$.*

Démonstration. Il suffit de voir qu'ils ont les mêmes cocyles. On fixe deux cartes φ, φ' et un changement de cartes $\psi := \varphi' \circ \varphi^{-1}$. Dans des coordonnées locales données par φ et φ', les cocycles de $\mathcal{T}_X$ sont des matrices de coefficient (i, j) valant $\partial\psi_i/\partial z_j$ et pour $T^{0,1}X$ ils valent $(1/2)(\partial/\partial x_j - iI(\partial/\partial x_j))\psi_i$. C'est bien la même chose car $I(\partial/\partial x_j) = \partial/\partial y_j$. □

Les décompositions (5) et (6) de la partie 1.3 se réécrivent exactement de la même façon pour TX mais cette fois ce sont des fibrés de formes différentielles :

$$\bigwedge^* T^*X := \bigoplus_{k=0}^{2n} \bigwedge^k T^*X \quad \text{et} \quad \bigwedge^* T^*_{\mathbb{C}}X := \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X = \Big(\bigwedge^* T^*X\Big) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

et

$$\bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X = \bigoplus_{p+q=k} \bigwedge^{p,q} T^*X.$$

On note $\mathcal{A}^*_X$ (resp. $\mathcal{A}^*_{X,\mathbb{C}}$) le faisceau des sections de $\bigwedge^* T^*X$ (resp. $\bigwedge^* T^*_{\mathbb{C}}X$) appelées *formes différentielles réelles* (resp. *complexes*). Il se décompose en ensembles $\mathcal{A}^k_X$ et $\mathcal{A}^k_{X,\mathbb{C}}$ appelés formes différentielles de *degré* k. On note $\mathcal{A}^{p,q}_X$ le faisceau des sections de $\bigwedge^{p,q} T^*X$, appelées formes différentielles de *type* (ou *bidegré*) (p, q). On confond le faisceau et ses sections sur un ouvert quelconque.

Remarque 2.2.4. L'espace $\mathcal{A}^k_{X,\mathbb{C}}$ est exactement le complexifié de $\mathcal{A}^k_X$ et les opérations $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathcal{A}^k_X$ s'étendent $\mathbb{C}$-linéairement. Dans la suite on traite de la même façon ces deux espaces.

En coordonnées locales, une base de $\mathcal{A}^k_{X,\mathbb{C}}$ est formée par les $dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \wedge dy_{j_1} \wedge \cdots \wedge dy_{j_q}$ pour $p+q = k$ et des suites croissantes $I = (i_1, \ldots, i_p), J = (j_i, \ldots, j_q)$. On adopte la notation $dz_I := dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}$ et $d\bar{z}_J := d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}$. Alors une base de $\mathcal{A}^{p,0}_X$ est donnée par les dz_I, une base de $\mathcal{A}^{0,q}_X$ est donnée par les $d\bar{z}_J$ et enfin les $dz_I \wedge d\bar{z}_J$ forment une base de $\mathcal{A}^{p,q}_X$. On dipose toujours des projections $\Pi^{p,q} : \mathcal{A}^*_X \to \mathcal{A}^{p,q}_X$.

Dans ces coordonnées, la différentielle d d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$ est

$$df(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$$

et l'opérateur d s'étend à tout $\mathcal{A}^*_{X,\mathbb{C}}$. Un élément α de $\mathcal{A}^{p,q}_X$ et sa différentielle $d\alpha$ s'écrivent

$$\alpha = \sum_{I,J} f_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad \text{et} \quad d\alpha = \sum_{I,J} (df_{I,J}) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$$

où $f_{I,J} \in \mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$.

Définition 2.2.5 (Opérateurs ∂ et $\bar{\partial}$)**.** On définit sur $\mathcal{A}^{p,q}_X$ les opérateurs

$$\partial := \Pi^{p+1,q} \circ d : \mathcal{A}^{p,q}_X \to \mathcal{A}^{p+1,q}_X \quad \text{et} \quad \bar{\partial} := \Pi^{p,q+1} \circ d : \mathcal{A}^{p,q}_X \to \mathcal{A}^{p,q+1}_X.$$

En coordonnées locales et pour $f \in \mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$

$$\partial f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i \quad \text{et} \quad \bar\partial f = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar z_j} d\bar z_j$$

et ces opérateurs s'étendent à tout $\mathcal{A}^*_{X,\mathbb{C}}$.

On dit que d est un *opérateur différentiel de degré* 1 car il augmente de 1 le degré des formes différentielles (ceci n'est a priori pas la définition usuelle du degré d'un opérateur différentiel, comme l'ordre des dérivées qui interviennent). De façon analogue ∂ est un opérateur différentiel de *bidegré* $(1,0)$ et $\bar\partial$ est de *bidegré* $(0,1)$. Une fonction f est holomorphe si $\forall i$, $\partial f/\partial \bar z_i = 0$ ce qui se réécrit simplement $\bar\partial f = 0$. On a $d = \partial + \bar\partial$. La relation $d^2 = 0$ se développe en $\partial^2 + \partial\bar\partial + \bar\partial\partial + \bar\partial^2 = 0$ puis en comparant les bidegrés des opérateurs

$$\partial^2 = 0, \quad \bar\partial^2 = 0 \quad \text{et} \quad \partial\bar\partial = -\bar\partial\partial.$$

Ils vérifient naturellement la même *règle de Leibniz* que pour d : pour $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}_X, \beta \in \mathcal{A}^{r,s}_X$

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge \partial\beta \quad \text{et} \quad \bar\partial(\alpha \wedge \beta) = \bar\partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{p+q} \alpha \wedge \bar\partial\beta.$$

Enfin on a la proposition suivante, dont la démonstration calculatoire est admise.

Théorème 2.2.6 (Poincaré-$\bar\partial$). *Toute forme $\bar\partial$-fermée sur une variété complexe est localement $\bar\partial$-exacte. Autrement dit si $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}_X$ vérifie $\bar\partial\alpha = 0$ alors pour tout $z \in X$ il existe un voisinage ouvert U de z et une forme $\beta \in \mathcal{A}^{p,q-1}_X(U)$ tel que $\bar\partial\beta = \alpha$ sur U.*

Revenons maintenant un instant sur le fibré tangent holomorphe $\mathcal{T}_X$.

Définition 2.2.7 (Formes holomorphes). L'ensemble des sections du fibré $\bigwedge^* \mathcal{T}^*_X$ est appelé faisceau des *formes différentielles holomorphes* et est noté Ω^*_X. On a aussi les formes holomorphes de degré p dans Ω^p_X.

On voit qu'une forme holomorphe de degré p est la même chose qu'une forme de type $(p,0)$ et $\bar\partial$-fermée. Dans une carte elle s'écrit $\sum f_I dz_I$ où f_I est $\bar\partial$-fermée c'est à dire holomorphe.

2.3 Faisceaux et cohomologie

Les faisceaux sont des outils très utiles en géométrie, bien qu'abstraits au premier abord. Une bonne référence pour cette partie est le livre de Claire Voisin [Voi02]. Dans la suite on parlera de faisceaux de groupes abéliens mais on peut aussi remplacer cette notion par des anneaux, ou des espaces vectoriels, ou plus généralement des éléments d'une *catégorie abélienne*. De même que dans la partie 2.1, M désigne une variété réelle et X désigne une variété complexe. Les énoncés sur les fonctions s'énoncent aisément dans les cas différentiables, complexes et holomorphes.

Définition 2.3.1 (Pré-faisceau). Un *pré-faisceau* de groupes abéliens $\mathcal{F}$ sur M est la donnée, pour chaque ouvert $U \subset M$, d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$ et, si on a des ouverts $U \subset V \subset M$, d'un *morphisme de restriction* $r_{U,V} : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ qui vérifie la relation $r_{U,U} = \mathrm{id}_U$ et si $U \subset V \subset W \subset M$ alors $r_{U,V} \circ r_{V,W} = r_{U,W}$.

L'ensemble $\mathcal{F}(U)$ est appelé ensemble des *sections au dessus de* U. Pour $U \subset V$ et $f \in \mathcal{F}(V)$ on notera simplement $f_{|U}$ la restriction $r_{U,V} \circ f$ de f à U.

Définition 2.3.2 (Faisceau). Un pré-faisceau $\mathcal{F}$ est appelé un *faisceau* si pour tout ouvert U et tout recouvrement ouvert $U = \bigcup U_i$, si on a des sections $f_i \in U_i$ telles que $f_i = f_j$ sur $U_i \cap U_j$ alors il existe un unique élément $f \in \mathcal{F}(U)$ tel que $\forall i$, $f_{|U_i} = f_i$.

Exemple 2.3.3. Tout de suite donnons quelques exemples de faisceaux.

- Pour tout groupe abélien G, en particulier pour $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{C}$, on a le *faisceau constant* G vu comme le faisceau des fonctions continues à valeur dans G muni de la topologie discrète.
- On a déjà vu les faisceaux $\mathcal{C}^\infty_M$, $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}}$ et $\mathcal{O}_X$.
- Enfin, si $\pi : E \to M$ est un fibré vectoriel, l'ensemble de ses sections a naturellement une structure de faisceau. On confond souvent le fibré vectoriel et le faisceau associé.

On parle de *faisceau de $\mathcal{A}$-modules* si on a un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$, si chaque $\mathcal{F}(U)$ a une structure de $\mathcal{A}(U)$-module et si pour $U \subset V$ alors $r_{U,V}$ est un morphisme de $\mathcal{A}(V)$-modules. Par exemple, un fibré vectoriel réel (vu comme faisceau) est un faisceau de $\mathcal{C}^\infty_M$-modules. Si le fibré est complexe, c'est un faisceau de $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}}$-modules et s'il est holomorphe c'est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules. Remarquons qu'un fibré holomorphe n'est pas un faisceau de $\mathcal{C}^\infty_X$-modules ni de $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$-modules.

Définition 2.3.4 (Morphisme de faisceaux)**.** Un *morphisme de faisceaux* $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la donnée d'un morphisme $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ pour tout ouvert U qui commute avec les restrictions.

Définition 2.3.5 (Germe)**.** Le *germe* d'un faisceau $\mathcal{F}$ en $x \in M$ est

$$\mathcal{F}_x := \{(U, s),\ s \in U \subset M \text{ et } s \in \mathcal{F}(U)\}/\sim$$

où la relation est $(U, s) \sim (U', s')$ s'il existe un ouvert V tel que $x \in V \subset U \cap U'$ et $s_{|V} = s'_{|V}$. On peut le voir comme la limite de $\mathcal{F}(U)$ pour $U \to \{x\}$.

Un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est dit *injectif* (resp. *surjectif*) si le morphisme induit $\varphi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ est injectif (resp. surjectif) pour tout $x \in M$. Ceci équivaut à dire que pour tout $x \in M$ il existe un voisinage ouvert U de x sur lequel $\varphi(U)$ est injectif (resp. surjectif).

Donnons quelques rappels sur la cohomologie des complexes de groupes abéliens. On appelle *complexe de groupes abéliens* une suite de groupes abéliens $C^* := (C_i)_{i\geq 0}$ munie de morphismes $d^i : C_i \to C_{i+1}$ appelés *différentielles*, tels que $d^{i+1} \circ d^i = 0$. On pose $C_{-1} = \{0\}$. Les *groupes de cohomologie du complexe* sont les

$$H^i(C^*) := \frac{\operatorname{Ker}(d^i : C_i \to C_{i+1})}{\operatorname{Im}(d^{i-1} : C_{i-1} \to C_i)}$$

pour tout $i \geq 0$.

Si on a deux complexes $C^* = (C_i)$, $D^* = (D_i)$ alors un *morphisme de complexes* φ est la donnée pour tout $i \geq 0$ d'une application $\varphi_i : C_i \to D_i$ qui commute avec les différentielles. Un morphisme de complexes induit un morphisme des groupes de cohomologie $\varphi_i : H^i(C^*) \to H^i(D^*)$.

Enfin, étant donné trois complexes C^*, D^*, E^*, une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow C^* \longrightarrow D^* \longrightarrow E^* \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte longue en cohomologie

$$\cdots \longrightarrow H^i(C) \longrightarrow H^i(D) \longrightarrow H^i(E) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(C) \longrightarrow H^{i+1}(D) \longrightarrow H^{i+1}(E) \longrightarrow \cdots$$

où l'opérateur δ^i est appelé le *connectant*.

On se donne maintenant une suite de faisceaux $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}_i)_{i\geq 0}$ et des morphismes $d^i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_{i+1}$.

Définition 2.3.6 (Complexe et suite exacte)**.** La suite de faisceaux $\mathcal{F}^*$ est un *complexe* si pour tout $i \geq 0$, $d^{i+1} \circ d^i = 0$. Dans ce cas les applications d^i sont appellées les *différentielles*. C'est une *suite exacte* si pour tout $i \geq 0$ et pour tout x il existe un voisinage ouvert U de x sur lequel $\operatorname{Ker}(d^{i+1}(U)) = \operatorname{Im}(d^i(U))$.

Pour tout complexe de faisceaux $\mathcal{F}^*$ et tout ouvert U on a un complexe de groupes abéliens $\mathcal{F}^*(U)$ auquel on peut associer les groupes de cohomologie $H^i(\mathcal{F}^*(U))$.

Définition 2.3.7 (Résolution)**.** Une *résolution* d'un faisceau $\mathcal{F}$ est la donnée d'un complexe $\mathcal{F}^*$ et d'un morphisme $\mathcal{F} \to \mathcal{F}_0$ tel que la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \cdots$$

soit exacte en tant que suite de faisceaux.

On a maintenant tous les outils pour comprendre le gros énoncé ci-dessous, mais nous l'admettons entièrement.

Théorème 2.3.8 (Résolution et calcul de la cohomologie des faisceaux)**.** *On admet qu'à tout faisceau $\mathcal{F}$ sur une variété M on peut associer des* groupes de cohomologie $H^i(M, \mathcal{F})$ *pour tout $i \geq 0$ avec $H^0(M, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(M)$.*

On admet que tous les faisceaux $\mathcal{F}$ rencontrés par la suite admettent une résolution qu'on notera toujours $\mathcal{F}^*$, et que les groupes de cohomologie du faisceau $\mathcal{F}$ peuvent être calculés par la cohomologie du complexe (de groupe abéliens) $\mathcal{F}^*(M)$ des sections globales de la résolution. Autrement dit $H^i(M, \mathcal{F}) \simeq H^i(\mathcal{F}^*(M))$. Deux résolutions différentes induisent naturellement des cohomologies isomorphes. Les morphismes de faisceaux induisent des morphismes sur la résolution puis sur la cohomologie, et la naturalité signifie qu'une résolution permet de représenter (à isomorphisme près) à la fois les groupes de cohomologie et les morphismes induits entre ces groupes.

Enfin on admet que si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\mathcal{C}^\infty_M$-modules ou de $\mathcal{C}^\infty_{M,\mathbb{C}}$-modules sur une variété réelle alors $H^i(M, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \geq 1$. Ceci est lié à l'existence de partitions de l'unité, qui n'est plus valable pour des fonctions holomorphes.

Exemple 2.3.9. Les cohomologies suivantes sont importantes pour la suite :

- La *cohomologie de De Rham* $H^*_{\mathrm{DR}}(M)$ correspond à une résolution du faisceau constant $\mathbb{R}$ par les formes différentielles $\mathcal{A}^*_M$, avec l'inclusion $\mathbb{R} \to \mathcal{A}^0_M \simeq \mathcal{C}^\infty_M$. Le lemme de Poincaré dit que les formes fermées sont localement exactes, donc que les faisceaux de formes différentielles sont une suite exacte de faisceaux. Puis il faut vérifier que les 0-formes fermées sont bien des sections du faisceau constant $\mathbb{R}$, c'est à dire des fonctions constantes sur chaque composante connexe.
- Sur les formes $\mathcal{A}^*_{M,\mathbb{C}}$ on a exactement la même résolution, et on peut définir la cohomologie de De Rham à coefficients complexes $H^*_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{C})$ qui correspond à une résolution de $\mathbb{C}$. C'est même exactement le complexifié de la cohmologie de De Rham réelle, c'est à dire $H^*_{\mathrm{DR}}(M,\mathbb{C}) = H^*_{\mathrm{DR}}(M) \otimes \mathbb{C}$.
- La cohomologie *simplicale* et la cohomologie *singulière* (pour plus d'informations, voir [Lef11]) correspondent à des résolutions du faisceau $\mathbb{Z}$. On peut naturellement considérer la cohomologie simpliciale ou singulière à valeur dans un groupe abélien G ce qui correspond à une résolution du faisceau G. On a aussi le théorème de changement de coefficients $H^*(M,G) = H^*(M,\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} G$ qui est valable pour $G = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- La *cohomologie de Dolbeaut* sur une variété complexe X correspond à une résolution pour tout p du faisceau des p-formes holomorphes Ω^p_X par les formes de type (p,q) avec l'opérateur $\bar\partial$, c'est à dire une résolution
$$0 \longrightarrow \Omega^p_X \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,0}_X \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{A}^{p,1}_X \longrightarrow \cdots$$
qui est bien une résolution car d'une part une forme $(p,0)$ et $\bar\partial$ est la même chose qu'une p-forme holomorphe, d'autre part par le théorème 2.2.6 une forme $\bar\partial$-fermée est localement $\bar\partial$-exacte. En particulier pour $p=0$ on a une résolution du faisceau $\mathcal{O}_X$. On note $H^{p,q}(X) := H^q(X,\Omega^p_X)$.

Si on a des complexes de faisceaux $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^*$ alors, exactement comme pour les complexes de groupes, on peut parler de *morphisme de complexes de faisceaux* $\psi : \mathcal{F}^* \to \mathcal{G}^*$ quand ψ induit pour tout i un morphisme de faisceaux $\psi_i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{G}_i$ qui commute avec les différentielles. Un morphisme de faisceaux induit pour tout ouvert U un morphisme de complexes de groupes abéliens $\psi(U) : \mathcal{F}^*(U) \to \mathcal{G}^*(U)$ puis des morphismes sur la cohomologie. En conséquence, un morphisme de faisceaux $\psi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ induit un morphisme sur les résolutions puis sur la cohomologie $H^i(M,\mathcal{F}) \to H^i(M,\mathcal{G})$ pour $i \geq 0$.

On peut aussi parler de *suite exacte courte de faisceaux*
$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$
puis, en se ramenant si besoin à une résolution et aux morphismes induits, une telle suite induit une *suite exacte longue en cohomologie des faisceaux*
$$\cdots \longrightarrow H^i(M,\mathcal{F}) \longrightarrow H^i(M,\mathcal{G}) \longrightarrow H^i(M,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(M,\mathcal{F}) \longrightarrow H^{i+1}(M,\mathcal{G}) \longrightarrow H^{i+1}(M,\mathcal{H}) \longrightarrow \cdots$$
avec un opérateur connectant δ^i.

3 Étude des variétés hermitiennes et kählériennes

Après avoir acquis les notions de base de géométrie complexe, nous allons nous intéresser aux structures métriques sur les variétés. Puis en résumant toutes nos connaissances, nous serons en mesure de comprendre une partie du théorème de Calabi-Vesentini et ses enjeux.

3.1 Variétés hermitiennes et kählériennes

Encore une fois nous appliquons sur les variétés ce que nous avons vu sur les espaces vectoriels dans la partie 1.3. Mais on s'intéresse en particulier au produit scalaire.

Définition 3.1.1 (Variété hermitienne)**.** Une *variété hermitienne* (X,g) est la donnée d'une variété complexe X et d'une métrique riemannienne g sur X qui est compatible avec la structure presque-complexe sur TX. Autrement dit pour tout x, g_x est compatible avec I sur T_xX.

Soit donc (X,g) une variété hermitienne. Comme on l'a déjà observé, un produit scalaire euclidien sur chaque espace T_xX induit un produit scalaire hermitien sur $T_xX \otimes \mathbb{C}$. Globalement, cela signifie que la métrique g s'étend en une métrique hermitienne (à valeur complexe) $g_{\mathbb{C}}$ sur le fibré $T_{\mathbb{C}}X$.

On aimerait cependant avoir une métrique h qui soit un vrai produit hermitien (à valeur complexe) sur les espaces complexes (T_xX, I). On remarque que si h est une telle métrique hermitienne, alors la partie réelle de h est une métrique riemannienne sur X et sa partie imaginaire est une forme différentielle réelle de type $(1,1)$, ce qui amène à poser la définition suivante.

Définition 3.1.2 (Forme fondamentale)**.** La *forme fondamentale* associée à une métrique riemannienne g sur X compatible avec la structure presque-complexe est la forme $(1,1)$ réelle ω donnée par

$$\forall v, w \in TX, \quad \omega(v,w) := g(I(v),w) = -g(v, I(w))$$

où, comme on confond le fibré vectoriel TX et le faisceau, puis le faisceau et ses sections locales, écrire $v, w \in TX$ signifie que v, w sont des champs de vecteurs sur un ouvert quelconque.

On vérifie alors que $h := g - i\omega$ est une métrique hermitienne sur (TX, I) et que sur chaque fibre, via l'isomorphisme $(T_xX, I) \simeq T_x^{1,0}X$, on a l'égalité $h_x = 2g_{\mathbb{C},x}$. De plus, la donnée de ω est équivalente à la donnée de h car $h(v,w) = \omega(v, I(w))$. On peut alors définir une variété hermitienne (X,h) comme la donnée d'une variété complexe X et d'une métrique hermitienne h sur le fibré complexe (TX, I). La forme fondamentale est simplement $\omega = -\operatorname{Im}(h)$.

En coordonnées locales $(z_i, \bar{z}_j)$ la métrique h est donnée par une matrice hermitienne définie positive $(1/2)(h_{ij})$ qui est $\mathcal{C}^\infty_{\mathbb{C}}$, c'est à dire

$$h_{ij}(x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} h_{ij}(x) dz_i \otimes d\bar{z}_j$$

et un calcul donne l'expression de ω en coordonnées locales $(z_i, \bar{z}_j)$ ou (x_i, y_j)

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{i,j} h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j = \sum_{i,j} h_{ij} dx_i \wedge dy_j. \tag{7}$$

Si on se place dans des coordonnées où la matrice (h_{ij}) est l'identité (en un point !) un calcul donne

$$\omega^n = n!\, dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n = n! \left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$$

c'est à dire que $\omega^n/n!$ est la forme volume vol de la variété riemannienne (X, g).

Définition 3.1.3 (Variété kählérienne)**.** Une variété hermitienne (X,h), où h est une métrique hermitienne (à valeur complexe), est dite *kählérienne* si la forme fondamentale $\omega = -\operatorname{Im}(h)$ est fermée. Dans ce cas ω est appelée la *forme kählérienne* associée à h.

L'existence d'une forme kählérienne a de nombreuses conséquences. Commençons par étudier la condition $d\omega = 0$.

Théorème 3.1.4 (Coordonnées géodésiques)**.** *La forme ω est kählérienne sur X si et seulement si au voisinage de tout point z il existe des coordonnées locales holomorphes $z_1, \ldots, z_n$ dans lesquelles la matrice (h_{ij}) coïncide à l'ordre 2 avec la métrique standard sur $\mathbb{C}^n$. Cela s'écrit avec le développement limité $h_{ij}(z) = \delta_{ij} + O(|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)$.*

Démonstration. Pour le sens réciproque on utilise l'écriture (7). Alors $d\omega$ fait intervenir des termes dh_{ij} donc des dérivées à l'ordre 1 de (h_{ij}), mais elles sont toutes nulles donc $d\omega = 0$.

Le sens direct n'est qu'un calcul (voir [Huy04]) et on peut expliciter les coordonnées. □

Exemple 3.1.5. Tout de suite donnons des exemples de variétés kählériennes.

- L'espace $\mathbb{C}^n$ pour la métrique hermitienne standard.
- Si Y est une sous-variété d'une variété kählérienne (X, ω) alors le fibré tangent TY est un sous-fibré de TX et la restriction de ω à Y est une forme kählérienne sur Y.
- Si (X,ω) est kählérienne et G est un groupe discret d'isométries biholomorphes qui agit proprement et librement sur X alors la métrique kählérienne ω descend naturellement sur le quotient X/G.
- L'espace projectif complexe $P^n(\mathbb{C})$ admet la *métrique de Fubini-Study* donnée dans les coordonnées homogènes sur $U_i = \{[z_0 : \cdots : z_n],\, z_i \neq 0\}$ par

  $$\omega_i = \frac{i}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\left(\sum_{k=0}^n \left|\frac{z_k}{z_i}\right|^2\right)$$

  qui se recollent en une forme kählérienne sur tout $P^n(\mathbb{C})$.
- Nous allons voir par la suite que la boule unité $B^n \subset \mathbb{C}^n$ admet une métrique kählérienne qui coïncide en dimension 1 avec la métrique hyperbolique

  $$\frac{dx \otimes dy}{(1-|z|^2)^2}$$

  sur le disque de Poincaré.

Plus globalement, l'existence d'une forme kählérienne a la conséquence suivante en cohomologie.

Théorème 3.1.6 (Première conséquence en cohomologie de De Rham)**.** *Si (X, ω) est une variété kählérienne compacte de dimension n, alors les groupes de cohomologie de De Rham réels de degré pair H^{2k}_{DR} sont non nuls pour $0 \leq k \leq n$.*

Démonstration. Comme ω est fermée alors pour tout $k > 0$, ω^k est encore fermée donc c'est un élément de H^{2k}_{DR}. Si sa classe était nulle, cela signifierait qu'il existe une forme α pour laquelle $\omega^k = d\alpha$, et alors $\omega^n = d(\alpha \wedge \omega^{n-k})$. Donc le volume de la variété compacte X serait

$$\frac{1}{n!}\int_X \omega^n = \frac{1}{n!}\int_X d(\alpha \wedge \omega^{n-k}) = 0$$

par le théorème de Stokes. Ceci est absurde. □

Remarque 3.1.7. En fait ce théorème ne dépend que de la *structure symplectique* de X, c'est à dire de la donnée d'une 2-forme différentielle réelle fermée non dégénérée ω. Alors ω^n est une forme volume.

3.2 Formes harmoniques

L'existence d'une métrique hermitienne sur une variété complexe permet d'introduire de nouveaux opérateurs comme le laplacien sur une variété riemannienne. Sur une variété kählérienne ces opérateurs ont un comportement particulier que nous allons étudier. Dans toute la suite on étudie uniquement des formes différentielles complexes sur des variétés complexes. On peut l'adapter facilement au cas réel.

Soit (X, g) une variété hermitienne (ici g est à valeur réelle). Comme on l'a étudié dans la partie 1.3, il existe un opérateur linéaire sur TX appelé étoile de Hodge, qui s'étend sur $T_{\mathbb{C}}X$. Si la variété est compacte, on a un produit scalaire sur les formes différentielles globales $\mathcal{A}^*_X(X)$ (resp. hermitien sur $\mathcal{A}^*_{X,\mathbb{C}}(X)$) donné par

$$(\alpha, \beta) := \int_X \alpha \wedge *\beta = \int_X g(\alpha, \beta). \mathrm{vol} \quad \left(\text{resp.} \quad \int_X \alpha \wedge *\bar{\beta} = \int_X g_{\mathbb{C}}(\alpha, \beta). \mathrm{vol}\right)$$

et on note $\|\alpha\|^2 := (\alpha, \alpha)$. On rappelle que l'étoile de Hodge induit un isomorphisme anti-linéaire $\mathcal{A}^k_{X,\mathbb{C}} \simeq \mathcal{A}^{2n-k}_{X,\mathbb{C}}$ et $\mathcal{A}^{p,q}_X \simeq \mathcal{A}^{n-q,n-p}_X$. L'étoile de Hodge donne naissance à six nouveaux opérateurs sur une variété hermitienne.

Définition 3.2.1 (Opérateurs adjoints et laplaciens)**.** On définit sur $\mathcal{A}^*_{X,\mathbb{C}}$ les *opérateurs adjoints*

$$d^* := - * \circ d \circ *, \quad \partial^* := - * \circ \bar{\partial} \circ * \quad \text{et} \quad \bar{\partial}^* := - * \circ \partial \circ *$$

et les *laplaciens* associés

$$\Delta := dd^* + d^*d, \quad \Delta_\partial := \partial\partial^* + \partial^*\partial \quad \text{et} \quad \Delta_{\bar{\partial}} := \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}$$

qui sont des opérateurs auto-adjoints.

Alors comme d est de degré 1 on en déduit que d^* est de degré -1. De même, sachant que ∂ (resp. $\bar{\partial}$) est de bidegré $(1, 0)$ (resp. $(0, 1)$) on en déduit que ∂^* est de bidegré $(-1, 0)$ et que $\bar{\partial}^*$ est de bidegré $(0, -1)$. Le laplacien est de bidegré $(0, 0)$ donc conserve les espaces $\mathcal{A}^{p,q}_X$.

Définition 3.2.2 (Formes harmoniques)**.** Une forme différentielle $\alpha \in \mathcal{A}^*_{X,\mathbb{C}}(X)$ est dite *harmonique* si $\Delta\alpha = 0$. On parle aussi de formes ∂-harmoniques (resp. $\bar{\partial}$-harmoniques) si $\Delta_\partial\alpha = 0$ (resp. $\Delta_{\bar{\partial}}\alpha = 0$). On note $\mathcal{H}^k(X)$ l'espace des k-formes harmoniques et $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ l'espaces des (p, q)-formes harmoniques. On a aussi les espaces $\mathcal{H}^k_\partial(X)$, $\mathcal{H}^{p,q}_\partial(X)$, $\mathcal{H}^k_{\bar{\partial}}(X)$ et $\mathcal{H}^{p,q}_{\bar{\partial}}(X)$.

Il est clair que si α est harmonique alors $*\alpha$ l'est aussi (pour chacun des opérateurs). Si α est ∂-harmonique alors $\bar{\alpha}$ est $\bar{\partial}$-harmonique, et réciproquement.

Lemme 3.2.3 (Caractérisation des formes harmoniques)**.** *Une forme α sur une variété complexe compacte X est harmonique (resp. ∂-harmonique, resp. $\bar{\partial}$-harmonique) si et seulement si $d\alpha = d^*\alpha = 0$ (resp. $\partial\alpha = \partial^*\alpha = 0$, resp. $\bar{\partial}\alpha = \bar{\partial}^*\alpha = 0$).*

Démonstration. Il suffit d'observer que l'opérateur d^* est exactement l'adjoint de d pour le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$, c'est à dire que pour deux formes α, β on a $(d\alpha, \beta) = (\alpha, d^*\beta)$. Le calcul donne ainsi

$$(\Delta\alpha, \alpha) = (dd^*\alpha, \alpha) + (d^*d\alpha, \alpha) = \|d^*\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2$$

et les calculs sont les mêmes pour ∂ et $\bar{\partial}$. □

Nous avons maintenant besoin de deux faits suivants pour approcher un résultat très important, la décomposition de Hodge de la cohomologie.

Lemme 3.2.4 (Admis)**.** *On admet que si la variété X est kählérienne, on a la relation entre opérateurs $\Delta = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar\partial}$. En conséquence, les espaces de formes harmoniques pour d, ∂ et $\bar\partial$ sont les mêmes.*

Théorème 3.2.5 (Admis)**.** *On admet que sur une variété X compacte, les espaces de formes harmoniques $\mathcal{H}^k(X)$ et $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ sont de dimension finie. Ceci est lié à certaines propriétés des opérateurs elliptiques.*

On admet que chaque classe de cohomologie de De Rham $H^k_{DR}(X,\mathbb{C})$ admet un unique représentant harmonique dans $\mathcal{H}^k(X)$. De même, chaque classe de cohomologie de Dolbeaut $H^{p,q}(X)$ admet un unique représentant $\bar\partial$-harmonique dans $\mathcal{H}^{p,q}_{\bar\partial}(X)$.

Ce théorème a une conséquence très importante sur la cohomologie d'une variété kählérienne compacte, la *décomposition de Hodge*. Il est clair que l'espace des formes harmoniques se décompose selon

$$\mathcal{H}^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X) \quad \text{avec} \quad \overline{\mathcal{H}^{p,q}(X)} = \mathcal{H}^{q,p}(X)$$

mais comme chaque espace $\mathcal{H}^{p,q}(X)$ représente exactement une classe de cohomologie de Dolbeaut on en déduit une décomposition en

$$H^k_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X) \quad \text{avec} \quad \overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X).$$

On en déduit le théorème suivant, qui est immédiatement à mettre en relation avec le théorème 3.1.6.

Théorème 3.2.6 (Deuxième conséquence en cohomologie de De Rham)**.** *Sur une variété X kählérienne compacte les groupes de cohomologie de De Rham (complexes) de degré impair $H^{2k+1}_{\mathrm{DR}}(X,\mathbb{C})$ sont de dimension (complexe) paire.*

Remarque 3.2.7. Contrairement à la remarque 3.1.7, la condition énoncée ici dépend fortement de toute la structure kählérienne, et pas seulement symplectique.

3.3 Introduction à la déformation

Nous allons définir précisément ce que signifie « déformer une variété complexe ». Cette partie ne fait pas appel à la notion de variété kählérienne.

Définition 3.3.1 (Famille propre de variétés complexes)**.** On appelle *famille propre de variétés complexes* la donnée de deux variétés complexes B (la base) et X, avec une application $\pi : X \to B$ qui est holomorphe, propre et une submersion sur tout X.

Les fibres de π sont naturellement des variétés complexes compactes.

Exemple 3.3.2. Notons $\mathbb{H}$ le demi-plan de Poincaré. Considérons l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{C}\times\mathbb{H}$ donnée par $(n,m).(z,\tau) := (z+n+m\tau,\tau)$ puis formons le quotient $X := (\mathbb{C}\times\mathbb{H})/\mathbb{Z}^2$. On a une projection $\pi : X \to \mathbb{H}$. Alors cette projection est holomorphe, propre et est une submersion. La fibre au dessus de $\tau\in\mathbb{H}$ est le tore $\mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z})$. On peut donc voir X comme la famille des tores. En particulier si τ varie dans un domaine fondamental pour l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$, dont un bien connu est donné par $\{z\in\mathbb{H},\ -1/2 < \mathrm{Re}(z) < 1/2 \text{ et } |z| > 1\}$, on obtient tous les tores possibles.

On choisit un point base 0 de B et on note les fibres $X_t := \pi^{-1}(t)$ pour $t\in B$. L'un des prermiers théorèmes de la théorie de la déformation est le suivant.

Théorème 3.3.3 (Ehresmann)**.** *Si $\pi : X \to B$ est une famille propre de variétés complexes alors les fibres sont localement difféomorphes. Autrement dit pour tout point base $0\in B$ il existe un voisinage U de 0 tel que les fibres (X_t) pour $t\in U$ sont difféomorphes à X_0. De plus, X est localement difféomorphe à un produit $U\times X_0$.*

Avant de commencer la démonstration, donnons quelques commentaires sur ce théorème. A priori les fibres (X_t) sont une famille de variétés complexes et le théorème affirme qu'elles sont difféomorphes à X_0 mais elles ne sont pas forcément biholomorphes à X_0. Ce théorème permet de voir les fibres $(X_t)_{t\in U}$ comme une famille de déformations de la structure complexe de X_0.

Esquisse de démonstration du théorème d'Ehresmann. Au voisinage V_x de chaque point x de la fibre centrale X_0 la projection π est conjuguée par difféomorphismes à la projection $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ où n est la dimension de B. Ceci permet de remonter un champ de vecteurs sur un voisinage U_x de 0 en un champ de vecteurs sur V_x, sur les n premières coordonnées dans $\mathbb{R}^N$. On parle de relèvement *horizontal* et il est unique une fois fixée la conjugaison. Par compacité on se ramène à un nombre fini d'ouverts V_x et à un voisinage de 0 restreint en

$U = \bigcap U_x$. Puis par des partitions de l'unité on peut remonter horizontalement un champ de vecteurs sur U en un champ de vecteurs sur toute la fibre $\pi^{-1}(U) \subset \bigcup V_x$.

Maintenant si on se donne un point t dans U assez proche de 0 on a un champ de vecteurs dont le flot est un difféomorphisme de U qui envoie t sur 0. On vérifie que le flot du champ de vecteurs remonté est un difféomorphisme de toute la fibre X_t sur X_0.

Pour obtenir un produit on introduit un champ de vecteurs radial sur U dont le flot envoie chaque $t \in U$ sur le point 0. □

La projection π induit pour tout $x \in X_0$ une application linéaire $d\pi(x) : T_xX \to T_0B$ dont le noyau est l'espace tangent T_xX_0. Si on se restreint en des fibrés sur X_0, le fibré tangent TX_0 peut être vu comme un sous-fibré de TX qu'on note $TX_{|X_0}$. De façon globale, et si on se place dans le cadre holomorphe, on en déduit une suite exacte courte de faisceaux holomorphes

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{X_0} \longrightarrow \mathcal{T}_{X|X_0} \longrightarrow T_0B \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

où $T_0B \otimes \mathcal{O}_X$ est simplement le faisceau holomorphe associé à l'espace vectoriel (ou faisceau constant) T_0B.

Définition 3.3.4 (Application de Kodaira-Spencer)**.** L'application

$$\kappa : H^0(T_0B \otimes \mathcal{O}_X) \simeq T_0B \to H^1(X, \mathcal{T}_X)$$

induite par la suite exacte courte est appelée application de Kodaira-Spencer en 0 de la famille de variétés X.

Cette application paramètre les petites déformations de X_0 dans la direction donnée sur T_0B. L'objectif dans la suite va être de montrer l'annulation de $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ pour certaines variétés. Cela signifiera qu'il n'y a pas de petites déformations de la structure complexe et, on l'admet, que dans l'énoncé du théorème d''Ehresmann la variété X est localement biholomorphe à un produit $U \times X_0$.

4 Connexions et courbure sur les fibrés vectoriels

Avant de s'intéresser précisément à la déformation des variétés obtenues par quotient de la boule unité, comme dans les hypothèses du théorème de Calabi-Vesentini, il est néecessaire de s'intéresser à la courbure des variétés et des fibrés vectoriels.

4.1 Fibrés hermitiens et formes à valeur dans un fibré

Nous commençons par introduire la notion de fibré hermitien, ce qui n'est pas difficile compte tenu de tout ce qui a été fait avant. Puis nous introduirons les formes différentielles à valeur dans un fibré vectoriel, qui seront très utiles. Dans la suite les fibrés vectoriels seront tous complexes sur des variétés complexes, et il sera précisé quand ils sont holomorphes.

Définition 4.1.1 (Fibré hermitien)**.** Un *fibré hermitien* est la donnée d'un fibré vectoriel complexe E sur une variété complexe X et d'un produit scalaire hermitien h_x sur chaque fibre E_x, qui varie de façon différentiable avec x.

Une fois la variété X fixée on note (E, h) le fibré hermitien. Dans une trivialisation du fibré de rang r avec $E_U \simeq U \times \mathbb{C}^r$, pour tout $x \in U$ on associe à h_x une matrice hermitienne définie positive H_x qui représente un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^r$.

Le premier exemple de fibré hermitien est bien sûr l'espace tangent (TX, I) d'une variété hermitienne, ainsi que les espaces de formes différentielles. Les sommes, produits tensoriels, espaces duaux de fibrés hermitiens sont encore hermitiens. La structure hermitienne apporte deux propriétés supplémentaires.

Lemme 4.1.2 (Orthogonal d'un fibré)**.** *Si F est un sous-fibré de E alors la métrique h induit naturellement une décomposition en somme directe $E = F \oplus F^\perp$ où $F^\perp$ est le fibré orthogonal à F.*

Lemme 4.1.3 (Isomorphisme naturel)**.** *La métrique h induit naturellement un isomorphisme $E^* \simeq \bar{E}$ qui est anti-$\mathbb{C}$-linéaire, où l'élément $\bar{e}$ de $\bar{E}$ est envoyé sur la forme linéaire $h(\cdot, e)$.*

On se place sur un fibré vectoriel E complexe. Introduisons l'espace $\bigwedge^* T_\mathbb{C}X \otimes E$, dont le faisceau des sections est noté $\mathcal{A}_X^*(E)$. Ce sont les *formes différentielles à valeur dans E*. Les sections sur tout X sont notées $\mathcal{A}^*(X, E)$. Dans des coordonnées un élément de $\mathcal{A}_X^*(E)$ s'écrit $\sum \alpha_i \otimes s_i$ où α_i est une forme différentielle et s_i une section de E. Selon le type de forme différentielle on a aussi les espaces $\mathcal{A}_X^k(E)$ et $\mathcal{A}_X^{p,q}(E)$. Si E est holomorphe on peut introduire $\Omega_X^*(E)$. De nombreuses propriétés étudiées sur les formes différentielles se transportent immédiatement sur les formes à valeur dans E et nous allons les étudier très rapidement.

Supposons le fibré E holomorphe. Alors on a un opérateur différentiel $\bar{\partial}_E : \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E)$ où dans des coordonnées $\bar{\partial}_E(\sum \alpha_i \otimes s_i) = \sum \bar{\partial}\alpha_i \otimes s_i$. Ceci ne dépend pas des coordonnées car la différentielle $\bar{\partial}$ d'un changement de cartes holomorphe est nulle. De façon exactement analogue à la cohomologie de Dolbeault, l'opérateur $\bar{\partial}_E$ donne naissance pour tout $p \geq 0$ au complexe de faisceaux des formes $\mathcal{A}_X^{p,q}(E)$, qui est une résolution du faisceau $\Omega_X^p(E)$. Autrement dit on dispose des groupes de cohomologie de type Dolbeault $H^{p,q}(X, E) := H^q(X, \Omega_X^p(E))$ pour $q \geq 0$. En particulier pour $p = 0$ alors $\Omega_X^p(E)$ n'est rien d'autre que le faisceau E et donc pour tout $q \geq 0$ on peut écrire $H^q(X, E) = H^{0,q}(X, E)$. Le premier terme est à comprendre au sens de la cohomologie des faisceaux, le second au sens de la résolution de type Dolbeault.

Supposons en plus le fibré E et la variété X tous les deux hermitiens. Alors on a une étoile de Hodge $\bar{*}_E : \bigwedge^{p,q} T_{\mathbb{C}}X \otimes E \to \bigwedge^{n-p,n-q} T_{\mathbb{C}}X \otimes E^*$ donnée par $\bar{*}_E(\alpha \otimes s) = \overline{*(\alpha)} \otimes h(\cdot, s)$. On peut, comme on l'a déjà fait, introduire l'opérateur adjoint $\bar{\partial}_E^* := -\bar{*}_E \circ \bar{\partial}_{E^*} \circ \bar{*}_E$ et le laplacien $\Delta_E := \bar{\partial}_E \bar{\partial}_E^* + \bar{\partial}_E^* \bar{\partial}_E$. On peut donc parler des formes harmoniques, dont les espaces sont notés $\mathcal{H}^*(X, E)$.

Si la variété X est compacte, on a encore une version à valeur dans E du théorème 3.2.5. Mais comme on n'a pas de complexe de type De Rham, on n'a pas de décomposition de Hodge. Les espaces de formes harmoniques sont de dimension finie et on a l'isomorphisme $H^{p,q}(X, E) \simeq \mathcal{H}^{p,q}(X, E)$. Plus tard nous travaillerons avec le fibré $E = \mathcal{T}_X$ muni d'une métrique hermitienne sur X. Mais pour bien différencier les deux notions d'espace tangent (ici les formes différentielles sont des formes sur l'espace tangent à valeur dans l'espace tangent) il est beaucoup plus pratique d'écrire $\mathcal{T}_X$ comme un fibré E hermitien et holomorphe quelconque.

4.2 Connexions

L'étude des connexions est nécessaire pour parler de courbure. Comme dans la partie précédente on étudie uniquement des fibrés vectoriels complexes ou holomorphes sur une variété complexe qui sera toujours X.

Définition 4.2.1 (Connexion)**.** Soit E un fibré vectoriel. Une *connexion* sur E est un morphisme de faisceaux $\nabla : \mathcal{A}_X^k(E) \to \mathcal{A}_X^{k+1}(E)$ pour tout $k \geq 0$, qui satisfait la *règle de Leibniz généralisée* :

$$\forall f \in \mathcal{A}_X^p, \, \forall s \in \mathcal{A}_X^k(E), \quad \nabla(f \wedge s) = df \wedge s + (-1)^p f \wedge \nabla(s)$$

où les notations vont être expliquées car elles risquent de devenir compliquées.

D'abord on confond toujours un faisceau et ses sections quelconques, et on confond les fibrés vectoriels comme E ou TX avec leurs faisceaux de sections quelconques. Ainsi quand on écrit $f \in \mathcal{A}_X^p$, $s \in \mathcal{A}_X^k(E)$ il faut penser qu'on se donne un ouvert $U \subset X$, avec $f \in \mathcal{A}_X^p(U)$ et $s \in \mathcal{A}_X^k(U, E)$. Les formes différentielles à valeur dans E s'écrivent toujours avec une *partie forme* et une *partie fibré*. La plupart du temps on voit clairement qu'on effectue des opérations sur l'une ou l'autre partie. Typiquement on manipulera des éléments de $\mathcal{A}_X^*$, de $\mathcal{A}_X^*(E)$ et de $\mathcal{A}_X^*(\mathrm{End}(E))$. Les opérations entre ces trois types d'éléments se font toujours avec des produits extérieurs sur la partie forme. Sur la partie fibré on peut appliquer un endomorphisme à une section ou composer des endomorphismes. Comme autre exemple, si $\alpha \in \mathcal{A}_X^k$ et si s est une section de E alors $\alpha \otimes s$ est la même chose que $\alpha \wedge s$. C'est simplement l'élément de $\mathcal{A}_X^k(E)$ dont la partie forme est α et la partie fibré est s. Si $k = 0$ ceci correspond au produit par une fonction et on peut le noter αs. Malgré les différentes notations il n'y a toujours qu'une seule façon (intelligente !) de voir le produit de α et s. L'argument passé à la partie forme sera toujours écrit après un point. Si $E = TX$ et $u, v \in TX$ alors u, v sont des champs de vecteurs sur un ouvert quelconque et $\nabla(v).u$ est la connexion qu'on note en géométrie riemannienne $\nabla_u v$.

Une section s de E telle que $\nabla(s) = 0$ est dite *parallèle*. Si ∇, ∇' sont deux connexions sur E alors on observe que $\nabla - \nabla'$ est linéaire par rapport aux fonctions $\mathcal{C}_{X,\mathbb{C}}^\infty$, et on peut donc le voir comme un élément de $\mathcal{A}_X^1(\mathrm{End}(E))$. On en déduit

Proposition 4.2.2 (Espace affine des connexions)**.** *L'ensemble des connexions sur E a une structure d'espace affine sur $\mathcal{A}_X^1(\mathrm{End}(E))$. Dans une trivialisation locale sur E, toute connexion s'écrit $\nabla = d + A$ où d est la différentielle sur chaque coordonnée de E et A est dans $\mathcal{A}_X^1(\mathrm{End}(E))$. On peut voir A comme une matrice de 1-formes, ou comme une 1-forme à valeur dans les matrices. On l'appelle la* matrice de la connexion *dans la trivalisation locale*

Bien sûr en géométrie riemannienne la matrice A correspond à des symboles de Christoffel. Donnons tout de suite des exemples de connexions induites sur les fibrés vectoriels. Soient E, E_1, E_2 des fibrés complexes munis de connexions $\nabla, \nabla_1, \nabla_2$, et soient $s, s_1, s_2 \in \mathcal{A}_X^*(E)$.

- La connexion ∇ sur $E_1 \oplus E_2$ est $\nabla_1 \oplus \nabla_2$, c'est à dire $\nabla(s_1 \oplus s_2) = \nabla_1(s_1) \oplus \nabla_2(s_2)$.
- La connexion ∇ sur $E_1 \otimes E_2$ est donnée par $\nabla(s_1 \otimes s_2) = \nabla_1(s_1) \otimes s_2 + (-1)^{\deg(s_1)} s_1 \otimes \nabla_2(s_2)$ où si $s_1 \in \mathcal{A}_X^k(E)$ alors $\deg(s_1) = k$.
- La connexion ∇ sur le dual E^* est donnée par $\nabla(f)(s) = d(f(s)) - (-1)^{\deg(f)} f(\nabla(s))$ où $s \in E$ et si $f \in \mathcal{A}_X^k(E^*)$ alors $\deg(f) = k$.

On vérifie que toutes ces définitions ont bien un sens, et vérifier la règle de Leibniz a été un excellent exercice de calcul pour s'adapter aux notations. Nous allons introduire deux nouvelles notions, respectivement sur les fibrés hermitiens et holomorphes.

Supposons le fibré (E, h) hermitien. Dans une trivialisation locale on peut introduire la matrice A de ∇ et la matrice H de h.

Définition 4.2.3 (Connexion hermitienne)**.** Soit (E, h) un fibré hermitien avec une connexion ∇. La connexion est dite *hermitienne* si pour toutes sections locales s, s' de E on a $dh(s, s') = h(\nabla(s), s') + h(s, \nabla(s'))$. Dans une trivialisation ceci s'écrit $dH = {}^tAH + H\bar{A}$.

On vérifie par le calcul que la connexion est hermitienne si et seulement si $\nabla(h) = 0$. C'est bien sûr la notion analogue à une connexion métrique sur une variété riemannienne.

Supposons maintenant le fibré E holomorphe. On sait qu'on peut introduire une dérivation $\bar{\partial}_E$ sur E. D'autre part la connexion ∇ s'écrit en coordonnée $d + A$ avec $\mathcal{A}^1_X(\mathrm{End}(E))$. Puis A se décompose en $A^{1,0} \oplus A^{0,1}$ ce qui induit une décomposition en $\nabla = \nabla^{1,0} \oplus \nabla^{0,1}$, où $\nabla^{1,0} = \partial + A^{1,0}$ et $\nabla^{0,1} = \bar{\partial} + A^{0,1}$.

Définition 4.2.4 (Connexion compatible avec la structure holomorphe)**.** Soit E un fibré holomorphe, avec une connexion ∇. La connexion est dite *compatible avec la structure holomorphe* si $\nabla^{0,1}$ coïncide avec la dérivation $\bar{\partial}_E$. Si la matrice de ∇ est A alors cela signifie que $A^{0,1} = 0$ c'est à dire que A est de type $(1, 0)$.

Réunissons les deux notions ci-dessus, pour un fibré hermitien holomorphe. On obtient le résultat suivant.

Théorème 4.2.5 (Connexion de Chern)**.** *Soit (E, h) un fibré hermitien holomorphe. Il existe une unique connexion ∇ qui est à la fois hermitienne et compatible avec la structure holomorphe. On l'appelle la* connexion de Chern *sur (E, h).*

Démonstration. On se place dans une trivialisation locale. Une connexion ∇ a une matrice A et la métrique h a une matrice H. Si ∇ est hermitienne alors on a

$$dH = {}^tAH + H\bar{A}. \tag{8}$$

Si ∇ est compatible avec la structure holomorphe alors A est de type $(1, 0)$. La partie $(0, 1)$ de (8) donne $\bar{\partial}H = H\bar{A}$ ce qui détermine de manière unique la connexion avec $A = \bar{H}^{-1}\partial(\bar{H})$. □

Revenons un instant au cas où E est le fibré tangent holomorphe $\mathcal{T}_X \simeq T^{1,0}X$ d'une variété complexe X, avec une métrique hermitienne h. En particulier X est une variété riemannienne pour la métrique $g = \mathrm{Re}(h)$. Sur chaque fibre on a un isomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire $\xi : T^{1,0}_x X \to (T_xX, I)$. Notons ∇ la connexion de Chern sur $T^{1,0}X$. Elle induit naturellement une connexion (au sens réel) ∇' sur TX par l'isomorphisme ξ. Notons D la connexion de Levi-Civita sur TX, qui est l'unique connexion métrique sans torsion. Il est bien clair que ∇' est une connexion métrique si et seulement si ∇ est hermitienne. Par ailleurs on sait que les connexions de Chern et de Levi-Civita sont chacune uniques. On peut donc naturellement se poser la question : sur TX, les connexions ∇' et D coïncident-elles ? La réponse est oui si et seulement si la variété X est kählérienne. Plus précisément on a le résultat suivant, que nous admettons.

Théorème 4.2.6 (Caractérisation des variétés kählériennes)**.** *Avec les notations ci-dessus, et en posant ω la forme fondamentale de h, on a l'équivalence entre les propositions suivantes :*

- *La métrique h est kählérienne, ce qui s'écrit $d\omega = 0$.*
- *La connexion de Levi-Civita D et la connexion de Chern (transportée par ξ) ∇' coïncident sur TX.*
- *La structure presque-complexe I (vue comme endomorphsime de fibré vectoriel réel) est parallèle pour la connexion de Levi-Civita, ce qui s'écrit $DI = 0$. Cette condition signifie que le transport parallèle est $\mathbb{C}$-linéaire.*

Encore une fois on voit que les variétés kählériennes sont des variétés qui sont munies à la fois d'une structure complexe, riemannienne et symplectique, et dans un sens très fortement compatible.

4.3 Courbure

Cette partie est exactement la suite de la précédente et adopte les mêmes notations.

Définition 4.3.1 (Courbure)**.** La *courbure* d'une connexion ∇ sur un fibré complexe E est l'application

$$\Theta_\nabla := \nabla \circ \nabla : \mathcal{A}^0_X(E) \to \mathcal{A}^2_X(E).$$

Un calcul rapide montre que c'est une application $\mathcal{C}^\infty_{X,\mathbb{C}}$-linéaire qu'on peut donc voir comme un élément de $\mathcal{A}^2_X(\mathrm{End}(E))$.

Les arguments de la partie forme seront toujours notés après un point. Ainsi on écrira $\Theta_\nabla(s).(u,v)$ où s est une section (locale) de E et u, v sont des sections (locales) de TX. Nous allons donner des exemples de courbure sur les fibrés vectoriels, comme on l'a fait pour les connexions. Soient E, E_1, E_2 des fibrés complexes munis de connexions $\nabla, \nabla_1, \nabla_2$ et de coubures $\Theta, \Theta_1, \Theta_2$, et soient $s, s_1, s_2 \in \mathcal{A}^*_X(E)$.

- La coubure sur $E_1 \oplus E_2$ est donnée par $\Theta = \Theta_1 \oplus \Theta_2$.
- La coubure sur $E_1 \otimes E_2$ est donnée par $\Theta = \Theta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \Theta_2$.
- La courbure sur E^* est donnée par $\Theta(f) = -{}^t\Theta(f)$ où f est une section locale de E^* et ^{t} est l'application transposée.

Étudions maintenant la courbure dans une trivialisation locale. Si E est un fibré complexe et sa matrice de connexion est A alors une connexion s'écrit $\nabla = d + A$. Pour s une section locale de E on a alors

$$\Theta(s) = (d + A)(d(s) + A(s)) = d^2(s) + d(A(s)) + A(d(s)) + A(A(s)).$$

Or il est toujours vrai que $d^2 = 0$. De plus comme A est de degré 1 alors $d(A)(s) = d(A(s)) + A(d(s))$. Enfin $A(A(s))$ est la même chose que $(A \wedge A)(s)$ c'est à dire le produit extérieur sur la partie forme et la composition des endomorphismes sur la partie fibré. On en déduit que l'expression de la courbure dans une trivialisation est $\Theta = d(A) + A \wedge A$. Enfin on a besoin de cette dernière propriété.

Proposition 4.3.2 (Coubure de la connexion de Chern). *Soit E un fibré hermitien holomorphe. On se place dans une trivialisation locale, la métrique a une matrice H. Alors la courbure de la connexion de Chern est $\bar\partial(\bar H^{-1}\partial(\bar H))$.*

Démonstration. On rappelle que la connexion de Chern est donnée par $d + A$ où $A = \bar H^{-1}\partial(\bar H)$ est de type $(1,0)$. Puis $\Theta = d(A) + A \wedge A$. On a d'une part $d(A) = \partial(A) + \bar\partial(A)$, le premier terme étant de type $(2,0)$ et le second de type $(1,1)$. D'autre part $A \wedge A$ est de type $(2,0)$. Il reste à montrer que la courbure de Chern est de type $(1,1)$ ce qui impliquera qu'il ne reste que $\Theta = \bar\partial(A) = \bar\partial(\bar H^{-1}\partial(\bar H))$.

Or en partant de $dH = {}^tAH + H\bar A$ un calcul montre que ${}^t\Theta H + H\bar\Theta = 0$. Le calcul utilise notamment le fait que ${}^t(A \wedge A) = -{}^tA \wedge {}^tA$ pour des matrices de 1-formes. Alors en écrivant que $\Theta = \Theta^{2,0} + \Theta^{1,1}$ on déduit

$${}^t\Theta^{2,0}H + {}^t\Theta^{1,1}H + H\bar\Theta^{2,0} + H\bar\Theta^{1,1} = 0$$

puis on identifie les bidegrés : $\bar\Theta^{2,0}$ est de type $(0,2)$ donc en bidegré $(2,0)$ il reste ${}^t\Theta^{2,0}H = 0$ donc $\Theta^{2,0} = 0$. □

Quand E est le fibré tangent holomorphe $\mathcal{T}_X$ d'une variété complexe X on parlera simplement de la courbure de la variété X pour la coubure de Chern de $\mathcal{T}_X$.

5 Espaces symétriques

Tous les outils ont été développés pour étudier la courbure et la déformation des variétés. Il s'agit maintenant de s'intéresser aux espaces que nous allons déformer ! Pour cette partie la référence était initialement [Str07], mais ce document renvoie souvent vers la référence sur les espaces symétriques, le livre de Helgason [Hel62]. Enfin le livre de Mok [Mok89] est encore plus proche de ce sujet.

5.1 Variétés riemanniennes symétriques et localement symétriques

Nous allons commencer par revenir à la géométrie riemannienne. Le théorème 4.2.6 énonce que les résultats vus pour la connexion de Levi-Civita seront immédiatement vrais pour la connexion de Chern sur le fibré tangent holomorphe.

Soit donc (M, g) une variété riemannienne. Quand on étudie les connexions sur M, c'est à dire sur son fibré tangent TM, on ne s'intéresse plus à l'extension aux k-formes à valeur dans TM. Une connexion est donc simplement un morphisme de faisceaux $\nabla : \mathcal{A}^0(TM) \to \mathcal{A}^1(TM)$ qui vérifie la règle de Leibniz (simple) $\nabla(fX) = f\nabla(X) + df \otimes X$ où $f \in \mathcal{C}^\infty_M$ et $X \in TM$ (champ de vecteurs local). On note simplement $\nabla_Y X := \nabla(X).Y$. Un *tenseur mixte de type* (p,q) sur M est une section du fibré $(T^*M)^{\otimes p} \otimes (TM)^{\otimes q}$. Le nombre $p+q$ est appelé *l'ordre total* du tenseur. Une connexion ∇ sur TM permet de dériver tous les tenseurs (on ne s'intéresse plus aux formes différentielles) par les règles déjà vues :

- Si S, T sont des tenseurs alors $\nabla(S \otimes T) = \nabla S \otimes T + S \otimes \nabla T$.
- Si F est une section de T^*M alors pour une section s de TM, $\nabla(F)(s) = d(F(s)) - F(\nabla(s))$.

On rappelle que sur une variété riemannienne on a les notions de géodésique et d'application exponentielle $\exp_x : T_xM \to M$ pour tout $x \in M$. On a aussi les crochets de Lie. Enfin sur une variété riemannienne on a le tenseur de courbure R de type $(3,1)$, qui n'est plus à penser comme le Θ des variétés complexes, défini par

$$R(X,Y)Z := \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z.$$

Commençons par un lemme utile par la suite.

Lemme 5.1.1 (Isométries). *Si M est une variété riemannienne connexe, x un point de M, et si on se donne deux isométries $f, g : M \to M$ telles que $f(x) = g(x)$ et $df(x) = dg(x)$ alors $f = g$ sur tout M.*

Démonstration. En remplaçant f par $f \circ g^{-1}$ on peut se ramener au cas où $g = \mathrm{id}$, $f(x) = x$ et $df(x) = \mathrm{id}$. Alors dans un voisinage de x on a la carte exponentielle $\exp_x : T_xM \to M$ et f est l'identité sur T_xM donc en relevant les géodésiques on voit clairement que f est l'identité sur toute la carte exponentielle. Par connexité f est l'identité sur tout M. $\square$

Venons-en maintenant au principal théorème sur les variétés symétriques et localement symétriques.

Théorème 5.1.2 (Variété localement symétrique). *Soit M une variété riemannienne de coubure R. On a l'équivalence entre :*

- *Pour tout $x \in M$ il existe une isométrie locale involutive s_x dont x est le seul point fixe.*
- *Pour la connexion de Levi-Civita, $\nabla R = 0$.*

Une variété qui satisfait l'une de ces hypothèses est dite localement symétrique.

Démonstration. Commençons par quelques remarques sur la première condition. Comme s_x vérifie $s_x(x) = x$ et $s_x \circ s_x = \mathrm{id}$ avec x pour seul point fixe, alors la différentielle en x est $ds_x(x) = -\mathrm{id}$ sur l'espace tangent T_xM. De plus par le lemme 5.1.1 une telle symétrie est unique, et ce sera en fait l'application $y \mapsto \exp_x(-\exp_x^{-1}(y))$.

Si on suppose $\nabla R = 0$ alors on admet qu'un calcul montre que s_x ainsi définie est bien une isométrie, ce qui conclut. Réciproquement, soient X, Y des champs de vecteurs au voisinage de x. La différentielle ds_x transporte la connexion de Levi-Civita ∇ en une connexion ∇' par la formule

$$\nabla'_Y X = ds_x^{-1} . \nabla_{(ds_x . Y)}(ds_x . X)$$

et comme s_x est une isométrie on peut vérifier que ∇' est encore une connexion métrique sans torsion, donc est égale à ∇. La connexion ∇ transportée par ds_x permet encore de dériver tous les tenseurs. Si on se place en x alors $ds_x(x) = -\mathrm{id}$ et, sous la seule hypothèse que R est un tenseur $(3, 1)$ donc d'ordre total pair, la formule donne $\nabla_Z R = \nabla_{-Z} R$ pour tout Z. On a ainsi $\nabla R = -\nabla R$ donc $\nabla R = 0$. $\square$

La variété M est dite (globalement) *symétrique* si elle est connexe et si la symétrie s_x ci-dessus s'étend en une isométrie involutive sur tout M telle que x soit un point fixe isolé. Il est clair que le quotient d'une variété symétrique par un groupe discret d'isométries qui agit proprement et librement est localement symétrique. On a une réciproque partielle à cette proposition, découpée en deux lemmes.

Lemme 5.1.3 (Variétés localement symétriques simplement connexes). *Si M est une variété riemannienne localement symétrique, complète et simplement connexe alors les symétries locales s'étendent à tout M donc M est une variété riemannienne symétrique.*

Démonstration. Soit $x \in M$, s_x la symétrie locale. On se donne $y \in M$ et on cherche $s_x(y)$. Comme la variété est complète il existe une géodésique $\gamma(t)$ qui est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ et qui vérifie $\gamma(0) = x$, $\gamma(t_0) = y$ pour un certain t_0. Alors il est naturel de poser $s_x(y) = \gamma(-t_0)$. Vu dans la carte exponentielle en x, ceci coïncide avec $\exp_x(-\exp_x^{-1}(y))$. On admet que l'hypothèse de simple connexité assure que la définition de $s_x(y)$ ne dépend pas du choix de la géodésique γ. $\square$

Lemme 5.1.4 (Revêtement universel des variétés complètes localement symétriques). *Si M est une variété riemannienne complète localement symétrique alors M est un quotient de son revêtement universel $\tilde{M}$ qui est une variété riemannienne symétrique.*

Démonstration. La variété riemannienne M (complète donc connexe) admet un revêtement universel $\pi : \tilde{M} \to M$ qui est simplement connexe et π est un homéomorphisme local. En particulier π transporte la structure (ici riemannienne, mais aussi complexe ou kählérienne), $\tilde{M}$ est une variété riemannienne localement symétrique et π est une isométrie locale. Il est toujours vrai que M est un quotient de son revêtement universel. Il ne reste plus qu'à montrer que $\tilde{M}$ est une variété riemannienne complète, alors par le lemme 5.1.3 ce sera une variété riemannienne symétrique.

On se fixe donc $\tilde{x} \in \tilde{M}$ et $\tilde{v} \in T_{\tilde{x}}\tilde{M}$. Soit $\tilde{\gamma}$ la géodésique telle que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ et $\tilde{\gamma}'(0) = \tilde{v}$. Pour montrer que $\tilde{M}$ est complète il faut montrer que $\tilde{\gamma}$ est définie sur tout $\mathbb{R}$. Or au voisinage de $\tilde{x}$, $\tilde{\gamma}$ se projette (par isométrie locale) sur une géodésique γ dans M telle que $\gamma(0) = \pi(\tilde{x})$ et $\gamma'(0) = d\pi(\tilde{x}).\tilde{v}$ puis comme M est complète, γ est définie sur tout $\mathbb{R}$. Comme on sait relever les chemins, γ se relève à $\tilde{M}$ sur tout $\mathbb{R}$ et coïncide avec $\tilde{\gamma}$ au voisinage de $\tilde{x}$. Par isométrie locale le relevé de γ est encore une géodésique ce qui permet de définir $\tilde{\gamma}$ sur tout $\mathbb{R}$. $\square$

En particulier si M est compacte alors elle est complète. Dans la suite on étudiera des variétés compactes obtenues comme des quotients de domaines de $\mathbb{C}^n$.

Définition 5.1.5 (Variété hermitienne localement symétrique)**.** Une variété hermitienne X est dite *localement symétrique* si pour tout $x \in X$ il existe une isométrie holomorphe involutive locale s_x dont x est le seul point fixe. Elle est dite *symétrique* si elle est connexe et si la symétrie s_x est globale et x est un point fixe isolé.

En particulier, on peut voir une variété hermitienne localement symétrique comme une variété riemannienne localement symétrique. Comme dans le cas riemannien, un quotient d'une variété hermitienne symétrique par un groupe discret d'isométries biholomorphes qui agit proprement et librement est une variété hermitienne localement symétrique.

Lemme 5.1.6. *Une variété hermitienne localement symétrique est kählérienne.*

Démonstration. L'endormorphisme de fibré I peut être vu comme un tenseur d'ordre $(1,1)$ donc d'ordre total pair. Comme on l'a déjà observé on a alors $\nabla I = 0$ puis par le théorème 4.2.6 une telle variété est kählérienne. □

Nous n'avons pas besoin d'en savoir plus sur les variétés symétriques, bien que ce soit un sujet d'étude très vaste.

5.2 Espaces hermitiens symétriques

Nous allons nous intéresser plus précisément à toute une classe de variétés hermitiennes symétriques appelées les domaines symétriques bornés. Il existe toute une théorie pour construire explicitement une métrique kählérienne sur ces espaces. Et en particulier dans cette classe on s'intéressera à la boule unité ouverte B^n de $\mathbb{C}^n$. Pour $z \in \mathbb{C}^n$ on note $\|z\|^2 = |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$.

Définition 5.2.1 (Domaine symétrique borné)**.** On appelle *domaine symétrique borné* un ouvert connexe borné $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ tel que pour tout $x \in \Omega$ il existe un biholomorphisme s_x de Ω qui soit involutif et tel que x soit un point fixe isolé de s_x.

Soit donc Ω un domaine symétrique borné. Notons $d\lambda$ la mesure de Lebesque sur Ω et $\mathcal{O}^2(\Omega)$ l'espace des fonctions holomorphes sur Ω qui sont de carré intégrable. On a naturellement un produit scalaire sur $\mathcal{O}^2(\Omega)$ induit par la norme L^2

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f(z)\bar{g}(z)\, d\lambda(z)$$

pour lequel $\mathcal{O}^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable. En effet, la formule intégrale de Cauchy à laquelle on applique l'inégalité de Cauchy-Scharz prouve que si une suite de fonctions holomorphes (f_n) converge pour la norme L^2 alors la suite (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω, et on sait que la limite uniforme des (f_n) est encore holomorphe.

Définition 5.2.2 (Noyau et métrique de Bergman)**.** On définit le *noyau de Bergman* K comme l'application sur $\Omega \times \Omega$

$$K(z,w) := \sum_i f_i(z)\bar{f}_i(w)$$

où les (f_i) forment une base orthonormée de $\mathcal{O}^2(\Omega)$. On définit la *métrique de Bergman* donnée par

$$\omega(z) := i\partial\bar{\partial}\log(K(z,z))$$

et on va voir que c'est une forme kählérienne sur Ω.

Le noyau de Bergman a de nombreuses propriétés intéressantes. D'abord si on l'appelle noyau c'est parce qu'il vérifie la propriété pour toute fonction $f \in \mathcal{O}^2(\Omega)$

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = \int_\Omega K(z,w) f(w)\, d\lambda(w)$$

et cette égalité permet de montrer que le noyau de Bergman ne dépend pas du choix d'une base orthonormée de $\mathcal{O}^2(\Omega)$. Une autre utilité de la métrique de Bergman est la proposition suivante.

Proposition 5.2.3 (Isométries pour la métrique de Bergman)**.** *Soient Ω, Ω' deux domaines symétriques bornés et $\varphi : \Omega \to \Omega'$ un biholomorphisme. Alors φ est une isométrie pour les métriques de Bergman sur Ω et sur Ω'.*

Démonstration. Soit (f_i) une base orthonormée de $\mathcal{O}^2(\Omega)$. Définissons

$$\Phi : \mathcal{O}^2(\Omega) \to \mathcal{O}^2(\Omega'), \quad f \mapsto (f \circ \varphi^{-1}) \det(J_{\mathbb{C}}(\varphi^{-1}))$$

alors par une simple intégration avec changement de variable (on rappelle que $\det(J_{\mathbb{C}}(\varphi^{-1}))\overline{\det(J_{\mathbb{C}}(\varphi^{-1}))} = \det(d\varphi^{-1})$ si φ est biholomorphe), on vérifie que Φ est à valeur dans $\mathcal{O}^2(\Omega')$ et induit une isométrie entre les espaces de Hilbert $\mathcal{O}^2(\Omega)$ et $\mathcal{O}^2(\Omega')$. Si on calcule le noyau de Bergman K' sur Ω' avec la base orthonormée des $(\Phi(f_i))$ alors on a la relation avec le noyau de Bermgan K sur Ω

$$\forall z \in \Omega, \quad K(z,z) = K'(\varphi(z),\varphi(z)) \det(d\varphi(z))$$

et il est facile de voir que

$$\forall z \in \Omega, \quad i\partial\bar{\partial}\log(K(z,z)) = i\partial\bar{\partial}\log(K'(\varphi(z),\varphi(z))).(d\varphi(z), d\varphi(z))$$

c'est à dire que φ est une isométrie. $\square$

On en déduit qu'un domaine symétrique borné est une variété hermitienne symétrique pour la métrique de Bergman. A partir de maintenant nous ne nous intéressons plus qu'à la boule unité B^n et à ses quotients.

Proposition 5.2.4 (Automorphismes de la boule unité). *L'ensemble* $\mathrm{Aut}(B^n)$ *des automorphismes (biholomorphes) de la boule unité* B^n *est isomorphe au groupe* $PU(1,n)$*, dont la définition sera donnée dans la preuve. De plus* $\mathrm{Aut}(B^n)$ *agit transitivement.*

Démonstration. On commence par inclure la boule B^n dans l'espace projectif $P^n(\mathbb{C})$ par $(z_1,\dots,z_n) \mapsto [1 : z_1 : \dots : z_n]$. Cette inclusion est un biholomorphisme de B^n sur un ouvert de $P^n(\mathbb{C})$. On note $[w_0 : \dots : w_n]$ les coordonnées homogènes sur $P^n(\mathbb{C})$. Sur $\mathbb{C}^{n+1}$ on a la forme hermitienne $\langle w, w'\rangle = w_0\bar{w}_0' - (w_1\bar{w}_1' + \dots + w_n\bar{w}_n')$ qui se restreint à la sphère $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Sur la sphère cette forme est invariante par l'action de S^1 donc descend sur le quotient $S^{2n+1}/S^1 \simeq (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^* = P^n(\mathbb{C})$. Alors la boule est exactement l'ensemble des éléments w de $P^n(\mathbb{C})$ tels que $\langle w, w\rangle > 0$. Sur $\mathbb{C}^{n+1}$ le groupe des transformations qui laissent invariante la forme hermitienne $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de signature réelle $(1,n)$ est (par définition) le groupe unitaire $U(1,n)$. De plus pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a $\langle \lambda w, \lambda w\rangle = |\lambda|^2\langle w, w\rangle$. On en déduit que le groupe des automorphismes de la boule est exactement le groupe projectif $PU(1,n)$, obtenu comme quotient de $U(1,n)$ par son centre $U(1) \simeq S^1$.

Pour voir que $PU(1,n)$ agit transitivement, on utilise le fait que $U(n)$ agit transitivement sur les vecteurs de même norme donc on a pour tout $z \in B^n$ une application a_z qui envoie z sur $(\|z\|, 0, \dots, 0) \in B^n$. En coordonnées homogènes a_z envoie $[1 : z_1 : \dots : z_n]$ sur $[1 : \|z\| : 0 : \dots : 0]$ et par l'inclusion naturelle $U(n) \subset U(1,n)$, a_z est dans $PU(1,n)$. D'autre part on peut écrire explicitement la transformation de $P^n(\mathbb{C})$

$$\Psi_z : [w_0 : w_1 : \dots : w_n] \mapsto \left[\frac{1}{\sqrt{1-\|z\|^2}}(w_0 - \|z\|w_1) : \frac{1}{\sqrt{1-\|z\|^2}}(-\|z\|w_0 + w_1) : w_2 : \dots : w_n\right]$$

qui envoie $[1 : \|z\| : 0 : \dots : 0]$ sur $[1 : 0 : \dots : 0]$. Si on écrit la matrice dans $\mathbb{C}^{n+1}$ alors la transformation Ψ_z est aussi dans $PU(1,n)$. Donc la composition $\Psi_z \circ a_z$ est dans $PU(1,n)$ et envoie tout $z \in B^n$ sur $0 \in B^n$. $\square$

Ce résultat a deux conséquences immédiates. On a bien sûr une symétrie globale en 0 sur la boule donnée par $\sigma : z \mapsto -z$. Comme $\mathrm{Aut}(B^n)$ agit transitivement, si on note φ_z une application qui envoie z sur 0 alors $\varphi_z^{-1}\circ\sigma\circ\varphi_z$ est une symétrie globale en z. La boule est donc un domaine symétrique borné qu'on munit de la métrique de Bergman, donc une variété hermitienne symétrique. Par le théorème 5.2.3 le groupe $\mathrm{Aut}(B^n) \simeq PU(1,n)$ est un groupe d'isométries (biholomorphes) de la boule.

Remarque 5.2.5. Il existe une classification des domaines symétriques bornés, qui est entièrement liée à celle des algèbres de Lie semi-simples complexes. Les quatre types de domaines sont notés $I_{n,m}$ (pour $n,m \geq 1$), II_n (pour $n \geq 2$), III_n (pour $n \geq 1$) et IV_n (pour $n \geq 3$). On a aussi deux domaines exceptionnels notés V (de dimension 16) et VI (de dimension 27). Les boules B^n correspondent aux domaines $I_{n,1}$. On se restreint à la boule car d'une part les calculs y sont les plus simples, d'autre part on voit mieux le lien avec les surfaces de Riemann, celles compactes de genre $g \geq 2$ étant des quotients de la boule B^1.

Enfin, il reste à calculer la métrique de Bergman sur la boule, ce qui est difficile.

Proposition 5.2.6 (Métrique de Bergman sur la boule). *Sur* B^n *la métrique de Bergman est donnée par la forme kählérienne*

$$\omega = -i\partial\bar{\partial}\log(1 - \|z\|^2).$$

Démonstration. On part d'une base de $\mathcal{O}^2(B^n)$ donnée par les fonctions $z \mapsto z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}$ pour une suite d'entiers $i_1, \dots, i_n$. Le produit scalaire de deux telles fonctions, après passage en coordonnées polaires sur n coordonnées simultanées, est

$$\langle z_1^{i_1} \dots z_n^{i_n}, z_1^{j_1} \dots z_n^{j_n}\rangle = \prod_{k=1}^{n}(2\pi\delta_{i_k,j_k}) \int_{\sum r_i^2 < 1} r_1^{i_1+j_1+1} \dots r_n^{i_n+j_n+1}\, dr_1 \dots dr_n$$

donc on voit que pour des suites différentes $(i_1, \dots, i_n)$ et $(j_1, \dots, j_n)$ elles sont orthogonales. Il reste à calculer la norme d'une fonction, c'est à dire l'intégrale de droite pour $(i_1, \dots, i_n) = (j_1, \dots, j_n)$. Pour le cas $n = 1$ on arrive à calculer explicitement $\langle z^i, z^i \rangle = (2\pi)/(2i + 2)$ et le noyau de Bergman est

$$K(z, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2i + 2}{2\pi} |z|^{2i} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1 - |z|^2)^2}$$

puis on peut ignorer les constantes (dans le log et devant) et donc $\omega = i\partial\bar{\partial} \log(K(z, z)) = -i\partial\bar{\partial} \log(1 - \|z\|^2)$. Le cas $n = 2$ est déjà beaucoup plus compliqué, et pour $n > 2$ on admet.

Cependant pour voir que ω est une forme kählérienne (il est clair que ω est fermée) il suffit de se placer en 0, puisque le groupe d'automorphismes agit transitivement et par isométries. On peut même utiliser le développement limité à l'ordre 2 en $z = 0$ de $\log(1 - \|z\|^2) = -\|z\|^2 + O(\|z\|^4)$. Puis il est facile de calculer $i\partial\bar{\partial}\|z\|^2 = i \sum dz_k \wedge d\bar{z}_k$ et donc $\omega(0)$ est (à une constante $1/2$ près) la forme fondamentale associée au produit scalaire hermitien standard $(i/2) \sum dz_k \otimes d\bar{z}_k$ sur $\mathbb{C}^n$. □

5.3 Positivité des fibrés et annulation de la cohomologie

Nous avons tous les outils pour comprendre le théorème de Calabi-Vesentini énoncé dans l'introduction. On a vu que boule unité B^n de $\mathbb{C}^n$ est un domaine symétrique borné, que l'on munit de la métrique de Bergman. C'est donc une variété hermitienne symétrique dont le groupe des biholomorphismes est $PU(1, n)$ qui agit transitivement et par isométries. Soit Γ un sous-groupe discret de $PU(1, n)$. On suppose que Γ agit proprement, librement et de façon co-compacte sur B^n. Alors $X := B^n/\Gamma$ est une variété hermitienne compacte localement symétrique. On s'intéresse à la rigidité de X quand $n \geq 2$. Pour cela on veut montrer l'annulation de $H^1(X, \mathcal{T}_X)$. Il faut d'abord étudier la courbure de la variété X. La référence pour cette partie est l'article [Mok07].

La courbure de la variété hermitienne X est la courbure de Chern de $\mathcal{T}_X$, qu'on notera comme un fibré hermitien holomorphe E. Sur chaque fibre $\mathcal{T}_X$ est isomorphe à (TX, I). Comme $PU(1, n)$ agit par isométries et transitivement, étudier la courbure de X revient exactement à étudier la courbure de B^n en 0. La courbure de Chern est une forme de type $(1, 1)$ à valeur dans $\mathrm{End}(E) \simeq E^* \otimes E$. Soit donc $z_1, \dots, z_n$ des coordonnées locales sur X et $e_1, \dots, e_r$ une trivialisation locale de E. On note $e_1^*, \dots, e_r^*$ la base duale associée. Alors la courbure s'exprime sous la forme

$$\Theta = \sum_{i,j,\alpha,\beta} c_{ij\alpha\beta} (dz_i \wedge d\bar{z}_j) \otimes (e_\alpha^* \otimes e_\beta)$$

où les $c_{ij\alpha\beta}$ sont les coefficients de la courbure. Par ailleurs la métrique hermitienne sur E donne une identification $\bar{E} \simeq E^*$. Grâce à cette identification la courbure s'exprime, dans le cas où $E = \mathcal{T}_X$, par

$$\Theta = \sum_{i,j,\alpha,\beta} c_{ij\alpha\beta} (dz_i \wedge d\bar{z}_j) \otimes (dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta). \tag{9}$$

Posons la forme bilinéaire P sur $TX \times E$ donnée par $P((v, u), (v', u')) := \Theta(u, \bar{u}').(v, \bar{v}')$ où v, v' sont des sections (locales) de TX et u, u' de E.

Définition 5.3.1 (Griffiths-positivité). La courbure en un point est dite *Griffiths-positive* si la forme P ci-dessus est définie positive. Ceci s'écrit, dans le cas où $E = \mathcal{T}_X$, pour toutes sections v de TX, u de $\mathcal{T}_X$, non nulles

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} c_{ij\alpha\beta} v_i \bar{v}_j u_i \bar{u}_j > 0.$$

On peut aussi parler de coubure Griffiths-semi-positive si on a l'inégalité large. On parle naturellement de Griffiths-négativité et semi-négativité.

La forme bilinéaire P ci-dessus induit une forme bilinéaire sur tout $TX \otimes E$. Explicitement cela signifie que $Q((v \otimes u), (v' \otimes u')) := \Theta(u, \bar{u}').(v, \bar{v}')$, étendue par bilinéarité.

Définition 5.3.2 (Nakano-positivité). La courbure en un point est dite *Nakano-positive* si la forme bilinéaire Q est définie positive. Érivons $\sum v^k \otimes u^k$ un élément (non nul) de $TX \otimes E$. Dans le cas où $E = \mathcal{T}_X$ cela s'écrit

$$\sum_{k,\ell} \sum_{i,j,\alpha,\beta} c_{ij\alpha\beta} v_i^k \bar{v}_j^\ell u_i^k \bar{u}_j^\ell > 0$$

et on parle bien sûr de semi-positivité et de négativité.

Il est bien clair que la Nakano-positivité implique la Griffiths-positivité et que ces notions coïncident sur un fibré de rang 1. Par ailleurs si Θ est la courbure de E alors on a déjà vu que la courbure de E^* est $-{}^t\Theta$ et il est donc clair qu'un fibré E est Griffiths-positif si et seulement si son dual E^* est Griffiths-négatif. Ceci n'est plus vrai pour la Nakano-positivité. La notion qui sera utile est la suivante.

Définition 5.3.3 (Dual-Nakano-négativité)**.** La courbure d'un fibré hermitien holomorphe E est dite *dual-Nakano-négative* si la courbure de E^* est Nakano-négative. Ceci revient à dire qu'en remplaçant les coefficients de courbure $c_{ij\alpha\beta}$ par $c^* := -c_{ij\beta\alpha}$ on obtient une courbure Nakano-positive.

Il n'y a plus que deux étapes pour démontrer le théorème de Calabi-Vesentini. Nous suivons de près les énoncés donnés par [Mok07].

Théorème 5.3.4 (Annulation de la cohomologie)**.** *Si (E,h) est un fibré vectoriel hermitien holomorphe sur une variété kählérienne X de dimension au moins 2 et si la courbure de E est dual-Nakano-négative alors $H^1(X,E)=0$.*

Théorème 5.3.5 (Dual-Nakano-négativité sur la boule)**.** *Le fibré hermitien holomorphe $\mathcal{T}_X$ sur la boule B^n munie de la métrique de bergman est dual-Nakano-négatif.*

Alors il devrait être clair que ceci implique le théorème de Calabi-Vesentini pour la boule et ses quotients.

Esquisse de démonstration de la dual-Nakano-négativité. On se ramène à calculer la courbure en 0 et on peut effectuer des développements limités. Nous avons réussi à effectuer les calculs en entier. La métrique de Bergman est donnée par la forme kählérienne

$$\omega = -i\partial\bar{\partial}\log(1-\|z\|^2).$$

On effectue un développement limité à l'ordre 4 en z. On obtient la matrice H de la métrique sous la forme

$$H = \sum_{\alpha,\beta} h_{\alpha\beta} dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta \quad \text{avec} \quad h_{\alpha,\beta} := \bar{z}_\alpha z_\beta + (1+\|z\|^2)\delta_{\alpha\beta}$$

puis on veut calculer la courbure de Chern $\Theta = \bar{\partial}(\bar{H}^{-1}\partial\bar{H})$. Là encore on a besoin de développements limités à l'ordre 2 pour $\bar{H}^{-1}$. La courbure se met sous la forme (9) avec les coefficients $c_{ij\alpha\beta} = -\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} - \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha}$. On introduit les coefficients $c^*_{ij\alpha\beta} := -c_{ij\beta\alpha}$ et l'ingalité à montrer se réécrit : pour des vecteurs $v^k \in TX$, $u^k \in \mathcal{T}_X$

$$\sum_{k,\ell}\sum_{i,\alpha} v_i^k \bar{v}_i^\ell u_\alpha^k \bar{u}_\alpha^\ell + \sum_{k,\ell}\sum_{i,\alpha} v_i^k \bar{v}_\alpha^\ell u_i^k \bar{u}_\alpha^\ell > 0.$$

Si au lieu de voir le vecteur v^k de coordonnées les (v_i^k) on voit le vecteur v_i de coordonnées les (v_i^k), si on voit le vecteur u_α de coordonnées les (u_α^ℓ), alors avec le produit hermitien standard on reconnaît

$$\sum_{i,\alpha} |\langle v_i, \bar{u}_\alpha\rangle|^2 + \left|\sum_i \langle v_i, \bar{u}_i\rangle\right|^2$$

et la positivité est vérifiée. □

Idées de démonstration de l'annulation de la cohomologie. Voir [Mok07]. On veut montrer l'annulation de $H^1(X,E)$ (au sens des faisceaux) et comme on l'a déjà remarqué ceci est la même chose que $H^{0,1}(X,E)$ (au sens de la résolution de type Dolbeaut) qui est lui même isomorphe à $\mathcal{H}^{0,1}(X,E)$. On part donc d'une forme harmonique u de type $(0,1)$ à valeur dans E et on veut montrer que $u=0$. Avec la métrique h sur le fibré E on peut introduire la forme $(1,1)$ réelle $\xi := ih(u,u)$ puis la forme $(2,2)$ réelle $\eta := i\partial\bar{\partial}\xi$ (donc $d\eta = 0$). Sur le fibré $\bigwedge^* T_{\mathbb{C}}X \otimes E$ on peut naturellement introduire une métrique $(\cdot,\cdot)$ qui dépend à la fois de la métrique sur X et de celle sur E. Cette métrique permet de démontrer, comme dans le cas des formes à valeur réelle, que si la variété X est compacte alors la forme u est harmonique si et seulement si $\bar{\partial}_E u = \bar{\partial}_E^* u = 0$.

Le but est de calculer, en coordonnées locales, la forme $-\eta \wedge \omega^{n-2}/(n-2)!$ (où ω est la forme kählérienne sur X) puis de l'intégrer sur X pour arriver à une égalité du type

$$0 = \int_X (\|\bar{\partial}_E u\|^2 + \|\bar{\partial}_E^* u\|^2)\frac{\omega^n}{n!} = \int_X (K(u,u) + \|\nabla\eta\|^2)\frac{\omega^n}{n!}$$

avec un terme de gradient positif en $\|\nabla\eta\|^2$ et un terme $K(u,u)$ lié à la courbure. Il suffit donc de montrer que le terme de courbure vérifie $K(u,u) > 0$ sauf si $u=0$, et quand on l'écrit en coordonnées cela fait apparaître l'hypothèse de dual-Nakano-négativité. Ceci prouve que $u=0$ donc $H^1(X,E)=0$. □

Conclusion et remerciements

Il resterait encore beaucoup à dire sur le sujet. Le théorème de Calabi-Vesentini comme présenté dans leur article [CV60] donne l'annulation de groupes de cohomologie d'ordre supérieur $H^q(X, \mathcal{T}_X)$ pour des espaces hermitiens symétriques X plus généraux et des entiers q qui varient entre 1 et une borne dépendant du type d'espace symétrique. Ceci s'interprête comme une rigidité « d'ordre supérieur », de façon un peu analogue à l'annulation des différentielles d'ordre supérieur d'une fonction qui paramètre la déformation.

J'ai choisi de m'intéresser en priorité au côté géométrie complexe (à partir du livre [Huy04]), géométrie différentielle et topologie. Il y a tout un côté géométrie algébrique avec l'étude de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,z}$, l'étude des sous-variétés algébriques et analytiques, les diviseurs, et bien sûr la conjecture de Hodge. Il y a aussi tout un côté analyse, fort présent dans [Dem97], qui permet de mieux comprendre les propriétés du laplacien et les inégalités sur la courbure. Enfin les espaces symétriques forment un sujet très vaste développé dans [Hel62]. Leurs propriétés sont nombreuses et leur classification est entièrement liée à celle des algèbres de Lie semi-simples complexes effectuée par Élie Cartan, mathématicien lorrain. On trouvera des précisions sur les algèbres de Lie semi-simples dans [Ser66].

Je remercie tout d'abord mon maître de stage Benoît Claudon. Il a toujours été disponible et très sympathique. Nous avons eu de longues discussions très enrichissantes. Je remercie aussi tous les membres du laboratoire qui nous ont très bien accueilli, moi et les (nombreux!) autres stagiaires. Je me suis très bien entendu avec les stagiaires de mon bureau et l'ambiance y était excellente. Enfin je souhaite continuer à étudier la géométrie complexe et il reste encore énormément de choses à comprendre.

Bibliographie

[CV60] Eugenio Calabi and Edoardo Vesentini. On Compact, Locally Symmetric Kähler Manifolds. *Annals of Mathematics*, 1960.

[Dem97] Jean-Pierre Demailly. Complex Analytic and Differential Geometry. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/agbook.pdf, 1997.

[GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley & Sons, 1978.

[Hel62] Sigurdur Helgason. *Differential Geometry and Symmetric Spaces.* Academic Press, 1962.

[Huy04] Daniel Huybrechts. *Complex Geometry (an introduction).* Universitext. Springer, 2004.

[Lef11] Louis-Clément Lefèvre. Homologie simpliciale de quelques sous-variétés. Rapport de stage de L3, http://perso.ens-lyon.fr/louisclement.lefevre/stage/rapport.pdf, 2011.

[Mok89] Ngaiming Mok. *Metric Rigidity Theorems on Hermitian Locally Symmetric Manifolds.* World Scientific, 1989.

[Mok07] Ngaiming Mok. Rigidity Problems on Compact Quotients of Bounded Symmetric Domains. In *Proceedings of the International Conference on Complex Geometry and Related Fields*, Studies in Advanced Mathematics, pages 201–249, 2007.

[Ser66] Jean-Pierre Serre. *Algèbres de Lie semi-simples complexes.* W.A. Benjamin Inc, 1966.

[Sik12] Jean-Claude Sikorav. Cours de M1 Surfaces de Riemann, 2012.

[Str07] Tobias Strubel. Basics on Hermitian Symmetric Spaces. Master's thesis, ETH Zürich, 2006–2007.

[Voi02] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe.* Cours spécialisés. Société Mathématique de France, 2002.