

Rapport de stage

Louis-Clément LEFÈVRE
Maître de stage : François-Xavier DEHON

Effectué à l'université de Nice
Du 23 mai au 30 juin 2011

Homologie simpliciale de quelques sous-variétés de \mathbb{R}^n



Table des matières

Introduction	3
1 Résumé du cours	3
1.1 Complexe simplicial	3
1.2 Triangulation	4
1.3 Homologie du complexe simplicial	5
1.4 Suite exacte de Mayer-Vietoris	6
1.5 Invariances	6
2 Mon travail	7
2.1 Connexité du complexe simplicial	7
2.2 Ruban de Moebius	8
2.3 Mes premières triangulations	9
2.4 Triangulation du produit	9
2.5 Triangulation de la sphère de dimension 3	10
3 Calculs et programmes	11
3.1 Homologie des surfaces avec GP/PARI	11
3.2 Utilisation de la suite de Mayer-Vietoris	11
3.3 Améliorations	12
4 Applications et approfondissements	12
4.1 Les grands résultats de la topologie algébrique	12
4.2 Différentes théories homologiques	13
Conclusion	13
Bibliographie	14

Introduction

J'ai passé six semaines dans le laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné de l'université de Nice et je suis très satisfait de mon stage. Je remercie mon maitre de stage, François-Xavier Dehon. Dans ce rapport de stage je présente d'une part le cours de topologie algébrique que j'ai lu, et d'autre part les résultats que j'ai moi même retrouvés et les calculs que j'ai effectués.

La partie 1 est un rapide résumé du cours de topologie algébrique de M. Dehon [2] que j'ai commencé à lire avant le début de mon stage. La partie 2 présente le travail que j'ai réalisé. J'ai approfondi différents points du cours, j'ai démontré certaines propriétés qui étaient laissées au lecteur, et j'ai triangulé à la main des espaces topologiques. La partie 3 présente les programmes que j'ai réalisé avec GP/PARI pour les calculs de triangulation et d'homologie, ainsi que les calculs que j'ai fait à la main. Enfin j'ai montré dans la partie 4 comment l'homologie permet de démontrer des théorèmes difficiles et qu'il existe différentes façons de définir l'homologie.

1 Résumé du cours

1.1 Complexe simplicial

On se place dans l'espace affine \mathbb{R}^N . Un simplexe de dimension n est l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^N de $n + 1$ points A_0, \dots, A_n affinement indépendants. Ces points sont appelés les sommets du simplexe. Une face d'un simplexe σ est un simplexe dont les sommets sont pris parmi les sommets de σ . On note S_σ l'ensemble des sommets de σ . Un complexe simplicial fini est un ensemble fini K de simplexes de \mathbb{R}^N tel que toute face d'un simplexe de K est un simplexe de K et l'intersection de deux simplexes de K est vide ou une face de chacun des simplexes. Les sommets de K sont les sommets des éléments de K et un sous-complexe de K est un sous-ensemble de K qui est lui-même un complexe simplicial. Un morphisme entre les complexes simpliciaux finis K et L est une application f de l'ensemble des sommets de K dans l'ensemble des sommets de L telle que pour tout simplexe σ de K les images par f des sommets de σ forment les sommets d'une même simplexe de L .

Un complexe simplicial fini K dans \mathbb{R}^N peut être vu comme un espace topologique pour la topologie induite sur la réunion de ses simplexes. On note $|K|$ cet espace, c'est une partie compacte de \mathbb{R}^N . Un morphisme f de K dans L s'étend de façon affine par morceaux en une application continue notée $|f| : |K| \rightarrow |L|$. Si f est bijective, on dit que c'est un isomorphisme de complexes simpliciaux et f induit un homéomorphisme $|f|$ entre les espaces topologiques $|K|$ et $|L|$.

On peut aussi définir un complexe simplicial fini abstrait : c'est un ensemble fini K d'ensembles finis non vides tel que pour tout élément A de K et tout partie non vide $B \subset A$, on a $B \in K$. Les éléments de K sont les simplexes de K , leurs éléments sont les sommets de K . En particulier d'un complexe simplicial K dans \mathbb{R}^N on peut obtenir un complexe simplicial abstrait qui est l'ensemble des S_σ pour σ un simplexe de K . Un morphisme du complexe simplicial abstrait K dans L est une application $f : K \rightarrow L$ telle que $\forall \sigma \in K, f(\sigma) \in L$. Un complexe simplicial abstrait K à N sommets peut être réalisé comme un complexe simplicial $|K|$ dans \mathbb{R}^N . Pour cela on indice la base canonique de \mathbb{R}^N par les sommets de K , ce qui donne une base $(e_s)_{s \in S_K}$. Puis à chaque simplexe σ de K on associe l'enveloppe convexe des (e_s) pour $s \in S_\sigma$. De même l'application f entre les complexes simpliciaux abstraits se réalise en une application

affine par morceaux $|f|$.

Deux complexes simpliciaux finis dans \mathbb{R}^N qui donnent des complexes simpliciaux abstraits isomorphes sont homéomorphes. Réciproquement deux complexes simpliciaux abstraits finis isomorphes réalisent des complexes dans \mathbb{R}^N , et donc des espaces topologiques, homéomorphes. A partir de maintenant, les complexes simpliciaux sont tous supposés finis. La notation K fait référence soit à un complexe abstrait soit à un complexe dans \mathbb{R}^N et $|K|$ désigne l'espace topologique.

1.2 Triangulation

Une triangulation d'un espace topologique X est la donnée d'un complexe simplicial fini K et d'un homéomorphisme entre $|K|$ et X . On s'intéresse à différentes méthodes pour trianguler un espace.

On note $\Delta[n]$ l'ensemble des parties non vides de $\{0, \dots, n\}$ et on l'appelle le simplexe standard de dimension n . Tout simplexe σ de dimension n donne un complexe simplicial K qui est l'union des faces de σ , et alors K est isomorphe à $\Delta[n]$. La réalisation de $\Delta[n]$ dans \mathbb{R}^{n+1} (qu'on peut aussi inclure dans \mathbb{R}^n) est une triangulation de la boule fermée B^n . Le bord de $\Delta[n]$ est $\Delta[n] \setminus \{\{0, \dots, n\}\}$ noté $\partial\Delta[n]$ et sa réalisation est une triangulation de la sphère S^{n-1} .

A partir d'une relation d'équivalence \sim sur les sommets de K , on peut construire le quotient S_K / \sim . En notant π la projection sur le quotient, on prouve que l'ensemble formé par les $\pi(S_\sigma)$ pour σ décrivant K forme un complexe simplicial qu'on appelle complexe quotient de K par \sim et qu'on note K / \sim .

La relation \sim peut être donnée par une action d'un groupe fini G sur S_K , c'est à dire $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G, x = g.y$. L'action est dite simpliciale si pour tout $g \in G$, l'action de g sur S_K est une application simpliciale. On note K/G le complexe quotient. Comme l'action est simpliciale, elle peut s'étendre de façon affine en une action de G sur $|K|$ et on peut aussi considérer le quotient $|K|/G$. Clairement la projection $\pi : K \rightarrow K/G$ induit une application continue surjective $|\pi| : |K| \rightarrow |K/G|$ qui peut se factoriser en une application $\psi : |K|/G \rightarrow |K/G|$. Il suffit à ψ d'être injective pour être un homéomorphisme car $|K|/G$ est compact. Mais ψ n'est pas toujours injective !

Il s'agit là de la difficulté de la triangulation du quotient. Prenons pour exemple la triangulation du plan projectif réel vu comme quotient de la sphère $S^2/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ où $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ agit en envoyant un point sur le point diamétralement opposé, appelée action par antipodie. La sphère peut être triangulée, par exemple, par un octaèdre K qui fait bien apparaître trois paires de sommets opposés. Alors $|K|$ est homéomorphe à S^2 , l'action de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ sur K correspond bien à l'antipodie donc $|K|/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est homéomorphe au plan projectif. Mais $K/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ne contient que trois sommets et sa réalisation est homéomorphe au disque D . Il faut choisir une triangulation plus fine de la sphère, par exemple un icosaèdre convient.

Si K est un complexe et L un sous-complexe de K on peut considérer K/L où L est identifié à un point. De même $|L|$ est une partie de $|K|$ et on peut considérer $|K|/|L|$ où $|L|$ est identifié à un point. Comme précédemment on a une application simpliciale surjective $K \rightarrow K/L$ qui induit une application continue surjective $|K| \rightarrow |K/L|$. Cette application passe au quotient en $\psi : |K|/|L| \rightarrow |K/L|$ et il suffit à ψ d'être injective pour être un homéomorphisme, ce qui n'est pas toujours le cas. Un contre-exemple facile est le cas de la sphère S^2 vu comme quotient du disque D dont on identifie tout le bord à un point. Si on triangule le disque par un triangle plein

K alors le bord L est formé de trois arrêtes, $|K|/|L|$ est homéomorphe à la sphère mais K/L ne contient qu'un seul point.

Un autre cas important est celui de la somme amalgamée, qui permet de recoller deux espaces. On se donne trois complexes K, L, M et des applications simpliciales $f : K \rightarrow L$ et $g : K \rightarrow M$. On note $L \cup_K M$ le complexe quotient de l'union disjointe $L \sqcup M$ par la relation qui identifie $f(x)$ et $g(x)$ pour tout $x \in K$. La construction pour les espaces topologiques est la même : connaissant des applications continues $f : |K| \rightarrow |L|$ et $g : |K| \rightarrow |M|$ on construit $|L| \cup_{|K|} |M| = (|L| \sqcup |M|) / \sim$ où $f(x) \sim g(x)$ pour tout $x \in |K|$. La projection $L \sqcup M \rightarrow L \cup_K M$ donne une application continue surjective $|L| \sqcup |M| \rightarrow |L \cup_K M|$ qui passe au quotient en $\psi : |L| \cup_{|K|} |M| \rightarrow |L \cup_K M|$ mais ψ n'est pas toujours injective. Souvent K est un complexe qui s'inclut dans L et dans M et f, g représentent les inclusions. Par exemple pour trianguler le plan projectif vu comme ruban de Moebius recollé le long du bord du disque, $|K|$ est homéomorphe à un cercle, $|L|$ au disque, $|M|$ au ruban de Moebius. La fonction f envoie le cercle sur le bord du ruban de Moebius et g sur le bord du disque. Le recollement $|L| \cup_{|K|} |M|$ donne le plan projectif.

1.3 Homologie du complexe simplicial

Une numérotation d'un simplexe σ de dimension n est la donnée d'une bijection entre $\{0, \dots, n\}$ et l'ensemble des sommets de σ . Une orientation de σ est la donnée d'une numérotation à une permutation paire de $\{0, \dots, n\}$ près, c'est donc une classe d'équivalence de simplexes numérotés. On note (A_0, \dots, A_n) le simplexe numéroté et $[A_0, \dots, A_n]$ le simplexe orienté.

Soit K un complexe simplicial. On appelle groupe des chaînes en degré n de K , noté $C_n(K)$, le groupe abélien libre de base les simplexes numérotés de dimension n quotienté par la relation $(A_0, \dots, A_n) \sim \epsilon(\varphi)(A_{\varphi(0)}, \dots, A_{\varphi(n)})$ où φ est une permutation de $\{0, \dots, n\}$ et $\epsilon(\varphi)$ sa signature. Autrement dit, un élément de $C_n(K)$ est une combinaison linéaire dans \mathbb{Z} de simplexes orientés de dimension n et changer l'orientation d'un simplexe revient à le changer en son opposé. En pratique on choisit un ordre total sur les sommets en les numérotant par des entiers, ce qui ordonne tous les simplexes de K .

On définit l'opérateur de bord $d_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ sur les générateurs par

$$d_n([A_0, \dots, A_n]) = \sum_{i=0}^n (-1)^i [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_n]$$

où $[A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_n]$ est le simplexe de dimension $n - 1$ obtenu en supprimant A_i . On vérifie ensuite que $d_n \circ d_{n+1} : C_{n+1}(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ est le morphisme nul, puis on pose $C_{-1} = \{0\}$ et $d_0 = 0$. On a alors affaire à ce qu'on appelle un complexe de groupes abéliens. Les éléments du noyau de d_n sont appelés les cycles de d_n . Ceux de l'image de d_{n+1} sont inclus dans le noyau de d_n et sont appelés les bords. L'homologie du complexe simplicial est alors définie comme la suite des groupes abéliens $H_n(K) = \text{Ker}(d_n) / \text{Im}(d_{n+1})$ et on désigne par $H_*(K)$ la suite des $(H_n(K))_{n \geq 0}$.

Soit $f : K \rightarrow L$ un morphisme de complexes simpliciaux. On définit $C_n(f) : C_n(K) \rightarrow C_n(L)$ par $C_n(f)([A_0, \dots, A_n]) = [f(A_0), \dots, f(A_n)]$ si les sommets $f(A_0), \dots, f(A_n)$ sont distincts et 0 sinon. L'application f commute avec d c'est à dire $d_{n+1} \circ C_{n+1}(f) = C_n(f) \circ d_{n+1}$. Cette propriété permet de montrer que f transforme les cycles en cycles, les bords en bords, et induit

pour tout n un morphisme entre les groupes d'homologie $H_n(K)$ et $H_n(L)$ en homologie notée $H_n(f) : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$. La suite des morphismes est notée $H_*(f)$.

En théorie des catégories, la construction du complexe de chaîne s'interprète comme un foncteur de la catégorie des complexes simpliciaux, dont les morphismes sont les applications simpliciales, vers la catégorie des complexes de groupes abéliens. L'homologie H_* est un foncteur de la catégorie des complexes simpliciaux vers la catégorie des suites de groupes abéliens. La partie 1.5 montre qu'en fait on peut définir ce foncteur sur la catégorie des complexes simpliciaux dont les morphismes sont les applications continues entre les espaces topologiques et même qu'il passe au quotient pour la relation d'homotopie entre applications continues.

1.4 Suite exacte de Mayer-Vietoris

Il s'agit d'une méthode permettant de calculer l'homologie d'un complexe L écrit comme réunion de deux sous complexes K et K' en connaissant les homologies de $K, K', K \cap K'$ et les applications induites en homologie par les inclusions de $K \cap K'$ dans K et dans K' . Notons i, j les inclusions de $K \cap K'$ dans K, K' , et p, q les inclusions de K, K' dans L . Il est possible de construire pour tout n une application $\partial_{n+1} : H_{n+1}(L) \rightarrow H_n(K \cap K')$ de telle sorte qu'on ait une suite exacte de groupes abéliens, dite suite exacte longue de Mayer-Vietoris :

$$\begin{aligned} \dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(K \cap K') \xrightarrow{(H_n(i), H_n(j))} H_n(K) \oplus H_n(K') \xrightarrow{H_n(p) - H_n(q)} H_n(L) \xrightarrow{\partial_n} \\ H_{n-1}(K \cap K') \longrightarrow \dots \xrightarrow{\partial_1} H_0(K \cap K') \xrightarrow{(H_0(i), H_0(j))} H_0(K) \oplus H_0(K') \xrightarrow{H_0(p) - H_0(q)} H_0(L) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Ici la somme directe de groupes abéliens \oplus est identique au produit \times et les applications peuvent être représentées par des matrices. Concrètement, pour un complexe donné, on écrit tout ce que l'on connaît dans la suite avec les générateurs des groupes d'homologie et les matrices des applications induites par les inclusions. Puis on essaie de calculer les groupes et morphismes inconnus en utilisant le fait que la suite est exacte.

Une application de cette suite est le calcul par récurrence de l'homologie de la sphère S^n . On l'écrit comme union $K \cup K'$ où K, K' sont deux hémisphères chacun homéomorphe à la boule B^n et l'intersection $K \cap K'$ est l'équateur homéomorphe à S^{n-1} . Comme les boules sont contractiles, on verra dans la partie 1.5 qu'elles ont la même homologie que le point c'est à dire nulle en degré supérieur à 1. On montre ainsi par récurrence que l'homologie de S^n est \mathbb{Z} en degré 0 et n et les autres groupes d'homologie sont nuls.

1.5 Invariances

On peut montrer que l'homologie d'un espace topologique triangulable, à isomorphisme près, ne dépend pas de la triangulation choisie et même qu'elle ne dépend que du type d'homotopie de l'espace. Dans cette partie on fixe un espace \mathbb{R}^N dans lequel les complexes se réalisent.

Soit f une fonction continue entre les espaces $|K|$ et $|L|$. On cherche à approcher f par une application simpliciale pour calculer l'homologie de $|K|$ et ceci indépendamment de la triangulation choisie. L'intérieur d'un simplexe σ est l'ensemble des barycentres de ses sommets à coordonnées strictement positives, noté $\text{Int}(|\sigma|)$. Un élément de $x \in |K|$ est dans l'intérieur d'un unique simplexe σ , c'est le simplexe de dimension minimal auquel x appartient. L'étoile d'un élément x de $|K|$ est l'ensemble des simplexes de $|K|$ auxquels x appartient, notée $\text{St}(x)$. L'intérieure de l'étoile est notée $\text{Int}(\text{St}(x))$, c'est l'union des $\text{Int}(|\sigma|)$ pour $\sigma \in \text{St}(x)$. Une approximation

simpliciale de f est une application simpliciale $s : |K| \rightarrow |L|$ telle que pour tout $x \in |K|$, $s(x)$ est dans $\text{Int}(\text{St}(f(x)))$. Si s est une telle approximation simpliciale alors il est facile de construire une homotopie entre s et f , il suffit de la prendre en ligne droite dans $\text{Int}(\text{St}(f(x)))$ qui est une partie convexe dans \mathbb{R}^N .

Une fonction continue $f : |K| \rightarrow |L|$ n'admet pas toujours d'approximation simpliciale. On peut cependant remplacer K par un complexe K^1 plus fin contenu dans K , appelé subdivision barycentrique. L'idée est de prendre pour sommets de K^1 tous les barycentres des simplexes de K (y compris les sommets de K) et de former des simplexes. De façon abstraite, les sommets de K^1 sont tous les simplexes de K , et les simplexes de K^1 ont pour sommets des simplexes $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de K qui forment une suite croissante pour l'inclusion. Le complexe K^1 se réalise dans \mathbb{R}^N en envoyant chaque sommet de K^1 , qui est un simplexe σ de K , sur le barycentre de σ dans $|K|$. La subdivision barycentrique fait apparaître des simplexes de $|K^1|$ de diamètre strictement plus petit que ceux de $|K|$. On peut l'itérer en subdivisant encore K^1 en K^2 , jusqu'à la n -ième subdivision barycentrique notée K^n , et obtenir des simplexes aussi petits que l'on souhaite. Alors le théorème de l'approximation simpliciale énonce que pour une fonction $f : |K| \rightarrow |L|$ il existe un entier n tel que $f : |K^n| \rightarrow |L|$ admette une approximation simpliciale. La fonction f étant affine sur chaque simplexe de $|K|$, elle s'étend naturellement sur $|K^n|$.

L'homologie de K est la même que celle de K^n pour tout n . L'approximation simpliciale a de bonnes propriétés. Entre autres si on a des applications continues $f : |K| \rightarrow |L|$ approximée par s et $g : |L| \rightarrow |M|$ approximée par s' alors $g \circ f$ est approximée par $s' \circ s$. Elle se comporte bien avec l'homologie, c'est à dire si f, g sont comme précédemment l'homologie de $s' \circ s$ est la composée des homologies de s' et s . Maintenant si on a deux triangulations K, L pour un même espace topologique, alors on a un homéomorphisme $f : |K| \rightarrow |L|$. En écrivant que $f^{-1} \circ f = \text{id}_{|K|}$, on a une approximation s de f , s' de f^{-1} et une subdivision K^p de K avec $s' \circ s = \text{id}_{K^p}$ tel que pour tout n , $H_n(s') \circ H_n(s) = H_n(\text{id}_{K^p}) = \text{id}_{H_n(K^p)}$. Cela signifie que $H_n(s)$ est un isomorphisme et donc les groupes d'homologie de K et L sont isomorphes. Ou encore que l'homologie, à isomorphisme près, ne dépend pas de la triangulation choisie pour un espace topologique.

Enfin on peut aussi montrer que si on a deux applications homotopes $f, g : |K| \rightarrow |L|$ alors f et g induisent le même morphisme en homologie. On en déduit que si deux espaces ont le même type d'homotopie alors ils ont la même homologie. Un cas courant est celui de la rétraction par déformation continue, qui conserve le type d'homotopie.

2 Mon travail

2.1 Connexité du complexe simplicial

Les résultats suivants sont évoqués dans le cours mais non démontrés.

Un complexe simplicial K est dit connexe si pour tous points $A, B \in K$ il existe une suite de 1-simplexes $\{A_0, A_1\}, \{A_1, A_2\}, \dots, \{A_{n-1}, A_n\}$ avec $A_0 = A$ et $A_n = B$. Cette relation donne immédiatement la notion de composantes connexes pour un complexe simplicial. Si K est connexe alors $|K|$ est connexe par arc donc connexe. On a aussi la réciproque.

Lemme 2.1. *Si $|K|$ est connexe alors $|K|$ est connexe par arc et K est connexe.*

Démonstration. D'abord on remarque que quelque soit le complexe K , $|K|$ est localement connexe par arc. Donc par un théorème de topologie si $|K|$ est connexe alors $|K|$ est connexe

parc arc.

Maintenant pour deux sommets A, B de K , il existe un chemin continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow |K|$ joignant les sommets A et B . Comme $[0, 1]$ est un 1-simplexe, on peut appliquer le théorème de l'approximation simpliciale : il existe une subdivision barycentrique L de $[0, 1]$ et une application simpliciale $s : L \rightarrow |K|$ tel que s soit homotope à γ . Alors s parcourt une suite de sommets A_0, \dots, A_n avec $A = A_0, B = A_n$ et les arrêtes entre ces sommets. Il suffit de suivre ces arrêtes pour obtenir la suite de 1-simplexes qui relie A et B . \square

A partir de maintenant on peut identifier composantes connexes de K et de $|K|$. Le résultat suivant montre qu'on peut calculer l'homologie sur chaque composante.

Lemme 2.2. *Si K s'écrit comme union disjointe $K = K_1 \sqcup \dots \sqcup K_p$ alors pour tout n , l'homologie de K est $H_n(K) = H_n(K_1) \oplus \dots \oplus H_n(K_p)$.*

Démonstration. Il est clair que $C_n(K) = C_n(K_1) \oplus \dots \oplus C_n(K_p)$. Maintenant par connexité un simplexe $[\sigma]$ est contenu dans un seul des $C_n(K_i)$ et $d([\sigma])$ est contenu dans $C_{n-1}(K_i)$ donc on peut passer au quotient sur chaque composante c'est à dire $H_n(K)$ est somme directe des $H_n(K_i)$. \square

On en déduit une description de l'homologie en degré 0.

Théorème 2.3. *Soit K un complexe simplicial. Alors $H_0(K)$ est un groupe abélien libre de rang le nombre de composantes connexes de K .*

Démonstration. D'après le lemme 2.2, il suffit de prouver que si K est connexe alors $H_0(K)$ est isomorphe à \mathbb{Z} .

On sait que $C_0(K) = \mathbb{Z}^N$ et $C_1(K)$ est le groupe abélien libre de base les 1-simplexes orientés. Comme $d_0 = 0$ alors $\text{Ker}(d_0) = C_0(K)$. Soit A un sommet de K , alors $[A]$ est dans $C_0(K)$. Montrons que c'est un générateur de $H_0(K)$. Pour B un sommet de K , il existe une suite de 1-simplexes $\{A_0, A_1\}, \{A_1, A_2\}, \dots, \{A_{n-1}, A_n\}$ avec $A_0 = A$ et $A_n = B$. Alors $[A] - [B]$ est dans $\text{Im}(d_1)$ car $d_1([A_0, A_1] + [A_1, A_2] + \dots + [A_{n-1}, A_n]) = ([A_1] - [A_0]) + ([A_2] - [A_1]) + \dots + ([A_n] - [A_{n-1}]) = [A] - [B]$.

Enfin il s'agit de montrer que pour tout entier $n \neq 0$, on a $n[A] \neq 0$. Il suffit de remarquer que pour un 1-simplexe orienté $[C, D]$, comme $d_1([C, D]) = [D] - [C]$ la somme totale des coefficients dans $C_0(K)$ d'un élément de $\text{Im}(d_1)$ est nulle. Donc en particulier $[A]$ est non nul ainsi que $n[A]$ pour tout $n \neq 0$. Ceci prouve que $H_0(K) = \mathbb{Z}[A]$. \square

2.2 Ruban de Moebius

Le ruban de Moebius R est défini par le carré $[0, 1] \times [0, 1]$ quotienté par la relation qui identifie $(0, y)$ et $(1, 1 - y)$. Son bord B est $[(0, 0), (1, 0)] \cup [(0, 1), (1, 1)]$ et est homéomorphe au cercle S^1 . Le cercle du milieu M est le cercle $[(0, 1/2), (1, 1/2)]$. On peut construire une rétraction continue $f : R \rightarrow M$ par $f(x, y) = (x, 1/2)$ qui induit un isomorphisme en homologie entre le ruban de Moebius et le cercle.

L'application $g : B \rightarrow M$ définie par $g(x, 0) = (x/2, 1/2)$ et $g(x, 1) = (1/2 + x/2, 1/2)$ est un homéomorphisme du bord sur le cercle du milieu. Je me suis demandé si une telle application s'étend en une application continue sur tout le ruban de Moebius. La réponse vient avec l'homologie.

Théorème 2.4 (Dehon-Lefèvre). *Il n'existe pas d'application continue $h : R \rightarrow M$ qui coïncide avec g sur le bord.*

Démonstration. On se donne h une telle application. Notons i l'inclusion $B \rightarrow R$. Le ruban de Moebius a les mêmes groupes d'homologie que le cercle à cause de la rétraction continue f . On choisit une base de l'homologie en degré 1, il vient $H_0 \simeq \mathbb{Z}$, $H_1 \simeq \mathbb{Z}$ et $H_2 = 0$. On peut calculer que l'application induite en homologie au degré 1 est $H_1(i) = 2 \text{id}$. L'application h doit vérifier $h \circ i = g$. En homologie on a alors $H_1(h) \circ H_1(i) = H_1(g)$, d'où $H_1(g) = 2H_1(h)$. Or g est un homéomorphisme de R dans M donc $H_1(g)$ doit être un isomorphisme de \mathbb{Z} dans \mathbb{Z} ce qui n'est pas le cas. \square

2.3 Mes premières triangulations

J'ai commencé par les exemples donnés dans le cours de topologie [2] qui donnaient aisément une triangulation du cylindre ou du ruban de Moebius. Puis, ayant compris le principe, le tore et la bouteille de Klein se font tout aussi facilement. On commence par dessiner le carré sur lequel on veut identifier les côtés opposés, puis on le subdivise assez finement en triangles. Il n'y a plus qu'à nommer les sommets par des entiers naturels en utilisant plusieurs fois certains noms pour identifier les sommets.

J'ai triangulé le plan projectif de deux façons différentes. D'abord il m'est venu naturellement à l'idée de trianguler la sphère par un icosaèdre, car c'est la triangulation la plus fine possible en triangles équilatéraux. Ensuite il n'y a qu'à dessiner un patron d'icosaèdre, ou seulement la moitié, et à identifier correctement les sommets opposés. L'autre méthode est de considérer le recollement du ruban de Moebius le long d'un disque. Un hexagone suffit à trianguler le disque en faisant apparaître six arêtes sur son bord auquel on peut recoller un ruban de Moebius triangulé par une bande de trois arêtes sur chaque côté. Encore une fois le recollement se fait simplement en renommant les sommets à coller.

Cette méthode permet très simplement de trianguler à la main les surfaces usuelles et en même temps de dessiner la triangulation. Mais elle s'avère très difficile à mettre en place pour des objets de dimension supérieure.

2.4 Triangulation du produit

Soient $|K|, |L|$ deux espaces topologiques triangulés. On se pose la question : le produit $|K| \times |L|$ est-il triangulable ? Comment en obtient-on une triangulation ?

En écrivant qu'un complexe est réunion de ses simplexes, on obtient $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} |\sigma|$ et $|L| = \bigcup_{\sigma' \in L} |\sigma'|$ d'où

$$|K| \times |L| = \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ \sigma' \in L}} |\sigma| \times |\sigma'|$$

On est ramené au produit de deux simplexes, et même au produit des simplexes maximaux.

Soient $K = \{0, \dots, k\}, L = \{0, \dots, l\}$. Alors $|K| \times |L|$ est isomorphe à la réalisation d'un complexe S de dimension $k + l$ dont l'ensemble des sommets est $K \times L$. On munit S de l'ordre produit, c'est à dire $(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a \leq c$ et $b \leq d$. On définit les simplexes de S comme les parties totalement ordonnées, ce qui forme bien un complexe simplicial. J'ai montré qu'alors les simplexes maximaux sont les suites strictement croissantes de $k + l + 1$ éléments de S , qu'il y a $\binom{k+l}{k} = \binom{k+l}{l}$ telles suites, qu'on ne peut pas en trouver de plus longues, et que

nécessairement elles commencent par $(0, 0)$ et se terminent par (k, l) . Tout ceci permet d'obtenir une triangulation de $|K| \times |L|$ de façon algorithmique.

2.5 Triangulation de la sphère de dimension 3

La sphère S^3 est vue comme le sous-ensemble de \mathbb{C}^2 des couples (x, y) tels que $|x|^2 + |y|^2 = 1$. Le cercle $S^1 = \{x \in \mathbb{C}, |x| = 1\}$ agit naturellement sur S^3 par multiplication. Le quotient S^3/S^1 est isomorphe à la droite projective complexe $\mathbb{C}P^1 = (\mathbb{C} \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*$. On cherche une triangulation de S^3 compatible avec cette action. L'idée est que pour trianguler un espace de dimension élevée, on le découpe en morceaux plus petits. Chaque morceau s'écrit comme un produit, qu'on sait trianguler, et les morceaux se recollent avec une somme amalgamée.

On commence par trianguler la droite projective complexe. On montre qu'on peut l'obtenir comme un recollement de deux parties homéomorphes au disque D dont l'intersection est homéomorphe à S^1 . On introduit les bijections ψ et φ qui sont des restrictions des projections de \mathbb{C}^2 sur $\mathbb{C}P^1$:

$$\begin{aligned}\psi &: \{(z, z'), z \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus \{\text{classe de } (1, 0)\} \\ \varphi &: \{(z, z'), z' \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}P^1 \setminus \{\text{classe de } (0, 1)\}\end{aligned}$$

On note ensuite les disques $D_1 = \{(z, 1), |z| \leq 1\}$ et $D_2 = \{(1, z), |z| \leq 1\}$. Alors on montre que $\psi(D_1) \cup \varphi(D_2) = \mathbb{C}P^1$ et $\psi(D_1) \cap \varphi(D_2) = \{\text{classe de } (z, z') \in \mathbb{C}P^1, |z| = |z'| \neq 0\}$ qui est homéomorphe à S^1 .

Maintenant on s'intéresse à S^3 en sachant que $S^3/S^1 \simeq \mathbb{C}P^1$. Notons π la projection de S^3 sur S^3/S^1 . Ce sont des théorèmes sur les fibrés au dessus d'une partie contractile qui affirment que la projection π de $\pi^{-1}(\psi(D_1))$ sur $\psi(D_1)$ est isomorphe à la projection de $\psi(D_1) \times S^1$ sur le premier facteur. De même pour D_2 .

On introduit les applications

$$\begin{aligned}\Psi &: D_1 \times S^1 \rightarrow S^3 \\ ((z, 1), \lambda) &\mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+|z|^2}}(z, 1) \\ \Phi &: D_2 \times S^1 \rightarrow S^3 \\ ((1, z), \lambda) &\mapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+|z|^2}}(1, z)\end{aligned}$$

et on montre que la sphère S^3 est égale à $\Psi(D_1 \times S^1) \cup \Phi(D_2 \times S^1)$. L'intersection de ces deux parties est homéomorphe à $S^1 \times S^1$. Puis S^3 est obtenue par la somme amalgamée

$$\Psi(D_1 \times S^1) \leftarrow \Psi(D_1) \times S^1 \cap \Phi(D_2 \times S^1) \rightarrow \Phi(D_2 \times S^1)$$

Après quelques calculs cette somme amalgamée est isomorphe à

$$D \times S^1 \xleftarrow{\text{inclusion}} S^1 \times S^1 \xrightarrow{\text{inclusion} \circ \Phi^{-1} \circ \Psi} D \times S^1$$

où $\Phi^{-1} \circ \Psi$ est l'application de $S^1 \times S^1$ dans lui même $(z, \lambda) \mapsto (\bar{z}, \lambda z)$.

Il ne reste plus qu'à trianguler les espaces $S^1 \times S^1$ et $D \times S^1$ de façon compatible avec l'application $\Phi^{-1} \circ \Psi$. Cela demande encore des subtilités car la triangulation produit que l'on obtient naturellement pour $S^1 \times S^1$ ne convient pas. J'ai réussi à la modifier légèrement comme voulu. Enfin on calcule la somme amalgamée.

La méthode présentée ici donne des idées pour trianguler des objets plus gros, comme $SO(3)$ qui agit naturellement sur S^2 . Mais c'est franchement compliqué pour moi...

3 Calculs et programmes

3.1 Homologie des surfaces avec GP/PARI

J'ai commencé par utiliser le logiciel de calcul formel GP/PARI pour calculer les groupes d'homologie des surfaces usuelles. Je me suis aidé d'un programme donné dans le cours, que j'ai amélioré et généralisé. J'ai d'abord triangulé les surfaces à la main. Les sommets sont ensuite numérotés par les entiers ce qui oriente tous les simplexes. Un complexe simplicial est représenté dans le logiciel par les liste de ses simplexes de dimension 0, 1 et 2. Les opérateurs de bord sont tout simplement représentés par des matrices.

Le groupe H_0 est un groupe abélien libre, sa dimension est donnée par celle du noyau de d_1 et le logiciel peut en donner des générateurs en donnant un base du noyau. On réécrit ensuite la matrice de d_2 dans une base adaptée au noyau de d_1 , puis on calcule la forme normale (dite de Smith) de d_1 . Les facteurs apparaissant sur la diagonale e_1, \dots, e_n donnent l'écriture $H_1 = \mathbb{Z}/e_1\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/e_n\mathbb{Z}$ et on peut obtenir une base de chaque composante. Enfin H_2 est le groupe abélien libre de rang le noyau de d_2 .

Après avoir triangulé différentes surfaces, mes résultats sont présentés dans le tableau 1.

Surface	H_0	H_1	H_2
Cercle S^1	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	0
Disque D	\mathbb{Z}	0	0
Cylindre $S^1 \times [0, 1]$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	0
Sphère S^2	\mathbb{Z}	0	\mathbb{Z}
Plan projectif $\mathbb{R}P^2$	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0
Ruban de Moebius	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}	0
Bouteille de Klein	\mathbb{Z}	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	0
Tore	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}^2	\mathbb{Z}
Tore à 2 trous	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}^4	\mathbb{Z}
Tore troué par un disque	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}^2	0

FIGURE 1 – Calcul des groupes d'homologie des surfaces

3.2 Utilisation de la suite de Mayer-Vietoris

J'ai utilisé la suite exacte de Mayer-Vietoris pour calculer des groupes d'homologie, selon les décompositions des espaces décrites ci-dessous.

- Le tore peut être écrit comme réunion de deux cylindres. Leur intersection dans le tore est l'union disjointe de deux cercles. L'inclusion du cercle dans le cylindre induit l'identité en homologie car le cercle est une rétraction par déformation continue du cylindre.
- Le tore s'écrit aussi comme l'union d'un tore troué et d'un disque, l'intersection étant un cercle. L'inclusion induit le morphisme nul en homologie.
- En recollant les deux tores troués le long du trou, on obtient le tore à deux trous.
- Le plan projectif réel est le recollement d'un disque le long du bord du ruban de Moebius. L'inclusion du bord dans le ruban de Moebius induit en homologie l'application 2 id.

J'ai retrouvé les résultats calculés avec le programme et une triangulation faite à la main.

3.3 Améliorations

J'ai réécrit entièrement mon programme afin de pouvoir trianguler facilement des produits, quotients, et réaliser des subdivisions barycentriques. L'idée est de représenter les complexes en donnant seulement la liste de leurs simplexes maximaux. Un simplexe est une liste de sommets et les sommets ne sont pas nécessairement des entiers consécutifs comme dans le premier programme. L'avantage est de pouvoir, lors de la subdivision, nommer les sommets directement par des simplexes, et lors du produit nommer les sommets directement par des couples de sommets.

Le programme est capable d'extraire toutes les faces d'un simplexe maximal pour calculer les matrices des opérateurs de bord exactement comme expliqué pour d_1 dans la partie 3.1. La subdivision barycentrique se fait en énumérant récursivement les suites strictement croissantes de simplexes, ce qui donne un calcul très lourd. J'ai essayé de porter mes propres optimisations au programme, mais il reste limité pour subdiviser des simplexes de dimension supérieure à 5 ou pour effectuer deux fois de suite la subdivision de grosses triangulations. Le produit se fait en énumérant les suites croissantes pour l'ordre produit, ce qui là aussi devient vite très lourd quand on dépasse la dimension 8.

Enfin le programme est capable de donner directement les triangulations de certains espaces de base. D'abord la boule de dimension n qui est simplement représentée par un simplexe à $n + 1$ sommets. Puis en prenant ses faces de dimension $n - 1$ on obtient la sphère S^{n-1} . Par un produit de cercles on obtient les tores de toute dimension. J'ai programmé la somme connexe de deux surfaces pour obtenir directement une triangulation de la surface fermée orientable de genre g , qui est la somme connexe de g tores de dimension 2. J'ai vérifié que l'homologie de telles surfaces est $H_0 \simeq \mathbb{Z}, H_1 \simeq \mathbb{Z}^{2g}, H_2 \simeq \mathbb{Z}$. J'ai réussi à programmer le quotient par un sous-complexe, éventuellement après avoir effectué plusieurs subdivisions. Le principal problème est que les opérations de produit et de subdivisions changent beaucoup les noms des sommets et simplexes si bien qu'à la fin il est difficile de retrouver, dans le complexe, où est le sous-complexe de départ.

J'ai implémenté le calcul des bases de l'homologie comme dans la première version du programme. Puis j'ai tenté de représenter les applications simpliciales. Il faut exprimer une telle application par une matrice dans les bases de l'homologie et savoir interpréter le résultat. Je me suis arrêté là car cela devenait compliqué de vérifier les résultats sur des exemples et de gérer proprement la représentation d'une application.

4 Applications et approfondissements

4.1 Les grands résultats de la topologie algébrique

J'ai commencé par lire le livre [1], et j'ai appris à démontrer quelques uns des grands théorèmes issus de la topologie algébrique. Ces théorèmes semblent difficiles au premier abord, mais l'homologie les rend très faciles à démontrer.

Le théorème du point fixe de Brouwer énonce que toute application continue d'une boule fermée de \mathbb{R}^n dans elle-même admet un point fixe. Le théorème de Borsuk-Ulam énonce que pour toute application $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ il existe des points antipodaux x et $-x$ tels que $f(x) = f(-x)$. Un autre résultat célèbre est la non-existence de champ de vecteur continue qui ne s'annule pas sur la sphère de dimension paire. En dimension 2 on l'appelle théorème de la boule chevelue.

On définit, à partir de l'homologie et des triangulations, les nombre de Betti et la caractéristique d'Euler qui sont des invariants topologiques et sont faciles à interpréter. Le n -ième nombre de Betti β_n est le rang de H_n dont on enlève la composante de torsion. La caractéristique d'Euler d'un complexe simplicial K de dimension n ayant pour tout i un nombre α_i de simplexes de dimension i est

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$$

et le théorème d'Euler-Poincaré énonce que

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \beta_i$$

Ceci prouve que la caractéristique d'Euler est un invariant topologique. En particulier pour tout polyèdre homéomorphe à une sphère, et c'est le cas des polyèdres convexes, on a la relation *Faces + Sommets - Arrêtes = 2*.

J'ai des notions sur le groupe fondamental et sa construction. D'après le théorème d'Hurewicz, le premier groupe d'homologie est l'abélianisé du groupe fondamental c'est à dire le quotient par le sous groupe engendré par les commutateurs. La démonstration passe par la construction d'un analogue du groupe fondamental sur les espaces triangulés, en utilisant des applications simpliciales sur lesquelles on définit une notion analogue à l'homotopie.

4.2 Différentes théories homologiques

Il existe plusieurs façons de définir l'homologie d'un espace topologique. Les complexes simpliciaux ont l'avantage d'être faciles à comprendre et les calculs peuvent être réalisés par un algorithme. Mais la classe des espaces topologiques que l'on peut trianguler est réduite, et il n'est pas facile de montrer l'indépendance de l'homologie vis-à-vis de la triangulation choisie. En particulier toute variété compacte est triangulable.

Le CW-complexe est un autre type de division de l'espace en cellules élémentaires appelées simplexes. Mais cette fois les cellules de dimension n sont homéomorphe à la boule ouverte de dimension n , ce qui donne une classe plus large de simplexes. Un CW-complexe de dimension n est obtenu en recollant des cellules de dimension n par leur bord le long d'un squelette qui ressemble à un CW-complexe de dimension $n - 1$.

La théorie de l'homologie singulière, introduite par Eilenberg [3], donne un sens à l'homologie de n'importe quel espace topologique X . Mais elle est plus difficile à calculer. L'idée est de considérer qu'un simplexe est une application continue de $|\Delta[n]|$ dans X . Les faces sont les restrictions des applications aux faces de $\Delta[n]$. Encore une fois on peut considérer le complexe de chaîne, qui a un très gros cardinal, et son homologie.

De façon générale, une théorie homologique doit passer par un complexe de chaîne qui est un groupe abélien libre. On peut d'ailleurs changer les coefficients, par exemple avec des rationnels on élimine les composantes de torsion de l'homologie. Avec $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ on élimine l'orientation des simplexes. La théorie doit aussi pouvoir construire la suite de Mayer-Vietoris c'est à dire pouvoir expliquer comment on calcule l'homologie d'un espace en connaissant l'homologie de chaque morceau. Enfin elle doit pouvoir s'interpréter comme un foncteur de la catégorie des espaces topologiques, ou d'une sous catégorie, vers la catégorie des suites de groupes abéliens et passer au quotient pour l'homotopie.

Conclusion

Je suis très content de mon stage. J'ai approfondi mes connaissances en topologie algébrique. J'ai eu l'occasion de lire des livres [1, 5, 4]. Je connais mieux les sous-variétés, ces espaces topologiques qui ressemblent localement à un espace vectoriel \mathbb{R}^n . J'ai particulièrement aimé la partie programmation et j'ai appris à utiliser GP/PARI.

L'objectif de ce stage était principalement, pour moi, de découvrir la vie dans un laboratoire de mathématiques. Je suis maintenant décidé à m'orienter vers la recherche en mathématiques. Mais je ne sais pas encore précisément dans quel domaine : beaucoup de thèmes très différents me plaisent. Pour cela j'ai eu l'occasion de discuter longuement avec mon maître de stage et il m'a fait rencontrer d'autres chercheurs. J'ai discuté avec Yann Brenier, directeur de recherche CNRS, ancien directeur des études à l'ENS Ulm, directeur de thèse d'Emmanuel Grenier. Il travaille dans l'équipe EDP et analyse numérique et m'a expliqué son travail. J'ai aussi rencontré François Delarue, professeur, ancien élève de l'ENS Lyon. Il fait partie de l'équipe probabilités et statistiques, c'est un domaine qui m'intéresse aussi.

Le premier jour j'ai discuté longuement avec Jean-Marc Lacroix, ingénieur responsable de tout le réseau informatique du laboratoire. Il m'a expliqué le fonctionnement du réseau et m'a montré les serveurs ainsi que les machines destinées au calcul et aux simulations. J'ai assisté à la soutenance de thèse de Luca Biancofiore, doctorant de mon bureau, qui travaille sur des simulations en mécanique des fluides. C'était très difficile à suivre pour moi. J'ai suivi une conférence de Georges Elencwajg sur les liens entre algèbre, géométrie et topologie. La conférence était censée être accessible à un public non spécialiste... ou plutôt, relativement non spécialiste !

Je remercie mon maître de stage, François-Xavier Dehon, pour m'avoir accordé du temps et pour m'avoir si bien accueilli. Il a été très disponible tous les jours, parfois pendant plusieurs heures, pour répondre à mes questions me raconter la topologie. Je remercie aussi les doctorants du laboratoire qui m'ont très bien accueilli et avec qui j'ai passé de très bons moments. Je reviendrais avec plaisir dans ce laboratoire.

Bibliographie

- [1] M.A. Armstrong. *Basic Topology*. Springer-Verlag, 1979.
- [2] François-Xavier Dehon. Cours de M2 topologie algébrique.
<http://math.unice.fr/~dehon/Ens/M2topalg/index.html>, 2009.
- [3] Samuel Eilenberg. Singular Homology Theory. *Annals of Mathematics*, 45, July 1943.
- [4] Victor Guillemin and Alan Pollack. *Differential Topology*. Prentice-Hall, 1974.
- [5] Joseph J. Rotman. *An Introduction to Algebraic Topology*. Springer-Verlag, 1988.