1 Énoncés

Exercice 1 Soient M et N dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices qui sont semblables sur $\mathbf{C}$. Soit donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $NP = PM$. On écrit $P = A + iB$ avec A et B dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que M et N sont semblables sur $\mathbf{R}$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 2 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ défini par $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = e_{\sigma(i)}$ et P_σ la matrice de u dans la base canonique. Calculer $\det P_\sigma$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 3 Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{Z})$ dont les coefficients diagonaux sont impairs et les autres sont pairs. Démontrer $\det(M) \neq 0$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 4 (Endomorphisme cyclique) Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, et u et v deux endomorphismes de E. On suppose que u est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

1. Déterminer la forme de la matrice de u dans la base précédente.
2. Montrer que v commute avec u si et seulement si c'est un polynôme en u.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 5 Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. Montrer que si u est nilpotent alors $u^n = 0$. On pourra considérer le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $u^p = 0$ et construire une famille libre à p éléments dans E.

Exercice 6 Soient $E = \mathbf{R}[X]_{\leq 3}$ et $u : E \to E$ l'application qui à un polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de $XP(X)$ par $X^4 - 1$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de u.
3. Déterminer le polynôme minimal de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Montrer que $X^4 - 1$ se factorise dans $\mathbf{R}[X]$ en un produit de trois polynômes deux à deux premiers entre eux.
5. En déduire une décomposition de E en somme directe de deux droites et d'un plan stables par u. Déterminer la restriction de u à chacun de ces sous-espaces. Déterminer une réduction de u en matrice diagonale par blocs et donner une matrice de passage correspondante.

Exercice 7 Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont semblables :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

1. On suppose que M est annulée par $X(X-1)(X-2)$. Pour $k \geq 3$, exprimer M^k en fonction de I_n, M et M^2.
2. Même question si on suppose que M est annulée par $(X-1)^2(X-2)$.

Exercice 9 Que peut-on dire d'un endomorphisme u d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie qui est annulé par X^3-1 et X^2-2X+1 ?

Exercice 10 Calculer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$. En déduire que A est inversible, expliciter A^{-1} et déterminer A^5.

Exercice 11 Soit $M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_d \end{pmatrix}$ une matrice diagonale par blocs carrés. Exprimer le polynôme minimal de M en fonction des polynômes minimaux des blocs $M_1, \ldots, M_d$.

Exercice 12 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et μ_u le polynôme minimal de u.

1. On suppose que u est inversible. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in K[X]$ tel que $u^{-1} = Q(u)$.
2. Soit $P \in K[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P et μ_u sont premiers entre eux.

Exercice 13 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, u et u' deux endomorphismes de E et λ et λ' dans K.

Énoncé	**V / F**
Pour $P \in K[X]$, si λ est valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.	
Si λ est valeur propre de u et λ' est valeur propre de u' alors $\lambda+\lambda'$ est valeur propre de $u+u'$.	
Si λ est valeur propre de u et λ' est valeur propre de u' alors $\lambda\lambda'$ est valeur propre de $u \circ u'$.	
Si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable.	
Si u est trigonalisable alors u^2 est trigonalisable.	
Si u^2 est diagonalisable alors u est diagonalisable.	
Si u^2 est trigonalisable alors u est trigonalisable.	
Si u et u' ont même polynôme caractéristique alors ils sont semblables.	
Si u et u' ont même polynôme minimal alors ils sont semblables.	
Si le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ est scindé sur $\mathbf{R}$ et si A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ alors A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.	

2 Indications

Indication 1 Séparer partie réelle et partie imaginaire dans l'égalité $NP = PM$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $A + \lambda B$ soit inversible.

Indication 2 On peut calculer le déterminant directement, mais on peut aussi se ramener au cas des transpositions en remarquant que pour σ et σ' dans $\mathfrak{S}_n$, on a $P_{\sigma\sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$.

Indication 3 Considérer l'image de M dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$.

Indication 4 Soit $\mathcal{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u. On pose $K[u] = \{P(u) \mid P \in K[X]\}$. Déterminer la dimension de $K[u]$ en fonction du polynôme minimal de u. Utiliser l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(u) & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v(x) \end{array} \right.$ pour majorer $\dim \mathcal{C}(u)$.

3 Solutions

Solution 1 On a $NA + iNB = AM + iBM$ donc, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire, on a $NA = AM$ et $NB = BM$.

On considère le polynôme $Q(X) = \det(A + XB) \in \mathbf{R}[X]$. C'est un polynôme non nul car $Q(i) = \det(P) \neq 0$. Il existe donc $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $Q(\lambda) \neq 0$. La matrice $A + \lambda B$ est alors une matrice réelle inversible et, d'après ce qui précède, on a $N(A+\lambda B) = (A+\lambda B)M$. Donc M et N sont bien semblables sur $\mathbf{R}$.

Remarque : Attention au fait que les matrices A et B n'ont aucune raison d'être inversibles, donc l'égalité $NA = AM$ ne suffit pas pour dire que M et N sont semblables sur $\mathbf{R}$.

Solution 2 Commençons par traiter le cas où σ est la transposition $(i\ j)$ où $1 \leq i < j \leq n$. On réordonne les vecteurs pour considérer la nouvelle base

$$(e_i, e_j, e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_{j-1}, e_{j+1}, \ldots, e_n).$$

Dans cette base, la matrice est $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{n-2} \end{array}\right)$ donc le déterminant vaut -1.

Montrons maintenant que pour σ et σ' dans $\mathfrak{S}_n$, on a $P_{\sigma\sigma'} = P_\sigma P_{\sigma'}$. Par définition de P_σ, pour $1 \leq i, j \leq n$, le coefficient en position (i, j) de P_σ vaut $(P_\sigma)_{i,j} = \delta_{i,\sigma(j)}$ où δ est le symbole de Kronecker (c'est-à-dire que $\delta_{i,\sigma(j)}$ vaut 1 si $i = \sigma(j)$, 0 sinon) : en effet la j-ème colonne est formée des coordonnées de l'image de e_j, c'est-à-dire des coordonnées de $e_{\sigma(j)}$. On a alors $(P_\sigma P_{\sigma'})_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (P_\sigma)_{i,k}(P_{\sigma'})_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,\sigma(k)}\delta_{k,\sigma'(j)} = \delta_{i,\sigma(\sigma'(j))} = (P_{\sigma\sigma'})_{i,j}$ (tous les termes de la somme sont nuls sauf pour $k = \sigma'(j)$).

On en déduit $\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma)$ où ε est la signature.

Remarque : 1) On a montré au passage que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \\ \sigma & \longmapsto & P_\sigma \end{array} \right.$ est bien à valeurs dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et que c'est un morphisme de groupes. La composée $\det \circ \varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathbf{R}^*$ est un morphisme de groupes non trivial et on retrouve la signature.

2) On pouvait aussi raisonner en décomposant σ en produit de cycles à supports deux à deux disjoints et réordonner les vecteurs de la base pour se ramener à des matrices diagonales par blocs, avec des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3) On peut également utiliser la formule du déterminant :

$$\det(P_\sigma) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\tau) \prod_{j=1}^{n} (P_\sigma)_{\tau(j),j} \right) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \left(\varepsilon(\tau) \prod_{j=1}^{n} \delta_{\tau(j),\sigma(j)} \right).$$

À τ fixé, le produit est non nul si et seulement si $\forall j \in [\![1, n]\!], \tau(j) = \sigma(j)$, c'est-à-dire $\tau = \sigma$ (auquel cas le produit vaut 1). Donc le seul terme non nul dans la somme est le terme pour $\tau = \sigma$, et il vaut bien $\varepsilon(\sigma)$.

Solution 3 Soit $\varphi : \mathbf{M}_n(\mathbf{Z}) \to \mathbf{M}_n(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ l'application qui réduit tous les coefficients modulo 2. Puisque l'application de réduction $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ est un morphisme d'anneaux, la définition de la somme et du produit dans les ensembles de matrices montre que φ est aussi un morphisme

d'anneaux. On déduit de la formule du déterminant que, pour $N \in \mathbf{M}_n(N)$, le déterminant de $\varphi(N)$ est l'image dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ de $\det(N) \in \mathbf{Z}$.

Par hypothèse, on a $\varphi(M) = I_n$. Or $\det(I_n) = 1$. Par conséquent $\det(M)$ est impair, et en particulier $\det(M) \neq 0$.

Remarque : 1) On pouvait dire que quand on développe $\det(M)$, tous les termes sont pairs sauf quand on prend le produit des coefficients diagonaux de M. Donc $\det(M)$ est somme de termes pairs et d'un seul terme impair, donc $\det(M)$ est impair.

2) Attention au critère d'inversibilité : si A est un anneau commutatif alors un élément $N \in \mathbf{M}_n(A)$ est inversible dans $\mathbf{M}_n(A)$ si et seulement si $\det(N)$ est inversible dans A. Par exemple, un élément $N \in \mathbf{M}_n(\mathbf{Z})$ est inversible dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{Z})$ si et seulement si $\det(N) = 1$ ou -1 (alors que N est inversible dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement si $\det(N) \neq 0$).

Solution 4 La matrice de u est de la forme $M = \begin{pmatrix} 0 & & & * \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & * \end{pmatrix}$ (c'est une matrice compagnon).

Soit $\mathcal{C}(u)$ l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec u. On pose $K[u] = \{P(u) \mid P \in K[X]\}$. Alors $\mathcal{C}(u)$ et $K[u]$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathrm{End}(E)$ et on a $K[u] \subseteq \mathcal{C}(u)$.

On a $\dim K[u] = \deg \mu_u$ où μ_u est le polynôme minimal de u (en notant $d = \deg \mu_u$, la famille $(\mathrm{id}, u, \ldots, u^d)$ est liée mais la famille $(\mathrm{id}, u, \ldots, u^{d-1})$ est libre donc c'est une base de $K[u]$). En outre, puisque u est cyclique, μ_u est égal au polynôme caractéristique de u, donc $\deg \mu_u = n$. Donc $\dim \mathcal{C}(u) \geq \dim K[u] = n$.

L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{C}(u) & \longrightarrow & E \\ v & \longmapsto & v(x) \end{cases}$ est linéaire. Si $v \in \ker \varphi$ alors $\forall k \geq 0, v(u^k(x)) = u^k(v(x)) = 0$ donc, comme $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, on a $v = 0$. Donc φ est injective, donc $\dim \mathcal{C}(u) \leq n$. On en déduit $\mathcal{C}(u) = K[u]$.