Exercice 1 Soient M et N dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ deux matrices qui sont semblables sur $\mathbf{C}$. Soit donc $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $NP = PM$. On écrit $P = A + iB$ avec A et B dans $\mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que M et N sont semblables sur $\mathbf{R}$.

Exercice 2 Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Soient $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$, u l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ défini par $\forall i \in [\![1, n]\!], u(e_i) = e_{\sigma(i)}$ et P_σ la matrice de u dans la base canonique. Calculer $\det P_\sigma$.

Exercice 3 Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{Z})$ dont les coefficients diagonaux sont impairs et les autres sont pairs. Démontrer $\det(M) \neq 0$.

Exercice 4 (Endomorphisme cyclique) Soient E un K-espace vectoriel de dimension n, et u et v deux endomorphismes de E. On suppose que u est cyclique, c'est-à-dire qu'il existe $x \in E$ tel que $(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x))$ soit une base de E.

1. Déterminer la forme de la matrice de u dans la base précédente.
2. Montrer que v commute avec u si et seulement si c'est un polynôme en u.

Exercice 5 (Endomorphisme nilpotent) Soient E un K-espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. Montrer que si u est nilpotent alors $u^n = 0$. On pourra considérer le plus petit entier $p \geq 1$ tel que $u^p = 0$ et construire une famille libre à p éléments dans E.

Exercice 6 Soient $E = \mathbf{R}[X]_{\leq 3}$ et $u : E \to E$ l'application qui à un polynôme $P \in E$ associe le reste de la division euclidienne de $XP(X)$ par $X^4 - 1$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E et donner sa matrice dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de u.
3. Déterminer le polynôme minimal de u. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
4. Montrer que $X^4 - 1$ se factorise dans $\mathbf{R}[X]$ en un produit de trois polynômes deux à deux premiers entre eux.
5. En déduire une décomposition de E en somme directe de deux droites et d'un plan stables par u. Déterminer la restriction de u à chacun de ces sous-espaces. Déterminer une réduction de u en matrice diagonale par blocs et donner une matrice de passage correspondante.

Exercice 7 Parmi les matrices suivantes, déterminer celles qui sont semblables :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, M_9 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 Soit $M \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$.

1. On suppose que M est annulée par $X(X-1)(X-2)$. Pour $k \geq 3$, exprimer M^k en fonction de I_n, M et M^2.
2. Même question si on suppose que M est annulée par $(X-1)^2(X-2)$.

Exercice 9 Que peut-on dire d'un endomorphisme u d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie qui est annulé par $X^3 - 1$ et $X^2 - 2X + 1$?

Exercice 10 Calculer le polynôme minimal de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbf{R})$. En déduire que A est inversible, expliciter A^{-1} et déterminer A^5.

Exercice 11 Soit $M = \begin{pmatrix} M_1 & & \\ & \ddots & \\ & & M_d \end{pmatrix}$ une matrice diagonale par blocs carrés. Exprimer le polynôme minimal de M en fonction des polynômes minimaux des blocs $M_1, \ldots, M_d$.

Exercice 12 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de E et μ_u le polynôme minimal de u.

1. On suppose que u est inversible. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in K[X]$ tel que $u^{-1} = Q(u)$.
2. Soit $P \in K[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P et μ_u sont premiers entre eux.

Exercice 13 Soient E un K-espace vectoriel de dimension finie, u et u' deux endomorphismes de E et λ et λ' dans K.

Énoncé	**V / F**
Pour $P \in K[X]$, si λ est valeur propre de u alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.	
Si λ est valeur propre de u et λ' est valeur propre de u' alors $\lambda + \lambda'$ est valeur propre de $u + u'$.	
Si λ est valeur propre de u et λ' est valeur propre de u' alors $\lambda\lambda'$ est valeur propre de $u \circ u'$.	
Si u est diagonalisable alors u^2 est diagonalisable.	
Si u est trigonalisable alors u^2 est trigonalisable.	
Si u^2 est diagonalisable alors u est diagonalisable.	
Si u^2 est trigonalisable alors u est trigonalisable.	
Si u et u' ont même polynôme caractéristique alors ils sont semblables.	
Si u et u' ont même polynôme minimal alors ils sont semblables.	
Si le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$ est scindé sur $\mathbf{R}$ et si A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ alors A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$.	