Sauf mention du contraire, tous les anneaux sont commutatifs.

Exercice 1 Montrer que si K est un corps alors tout morphisme d'anneaux $f : K \to B$ est injectif.

Exercice 2 Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1. L'image réciproque par f d'un idéal de B est-elle un idéal de A ?
2. L'image par f d'un idéal de A est-elle un idéal de B ?

Exercice 3 Déterminer les idéaux de $\mathbf{Z}$ et de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercice 4 Soient A un anneau et $a \in A$. Montrer que l'application $\mathrm{ev}_a : \left\{ \begin{array}{ccc} A[X] & \longrightarrow & A \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array} \right.$ est un morphisme d'anneaux.

Exercice 5 Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-anneaux ou des idéaux de $\mathbf{Z}[X]$:

1. $\{P \in \mathbf{Z}[X] \mid P(1) = 1\}$
2. $\{P \in \mathbf{Z}[X] \mid P(1) = 0\}$
3. $\{P \in \mathbf{Z}[X] \mid P(1) \in 3\mathbf{Z}\}$
4. $\{P \in \mathbf{Z}[X] \mid P'(1) = 0\}$

Exercice 6 Soient A un anneau (pas nécessairement commutatif) et $a \in A$. On dit que a est idempotent si $a^2 = a$. On dit que a est nilpotent s'il existe $n \geq 1$ tel que $a^n = 0$.

1. Déterminer les éléments idempotents et les éléments nilpotents dans le cas où A est intègre.
2. Montrer que le seul élément inversible et idempotent est 1. Montrer qu'aucun élément inversible n'est nilpotent.
3. Montrer que si $a \in A$ est idempotent alors $1 - a$ est idempotent. Montrer que si a est nilpotent alors $1 - a$ est inversible.
4. Montrer que si A est commutatif alors l'ensemble des éléments nilpotents est un idéal de A.

Exercice 7 Soient A un anneau et $\varphi : \mathbf{Z} \to A$ l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}$ dans A.

1. Justifier qu'il existe un unique entier $c \geq 0$ tel que $\ker \varphi = c\mathbf{Z}$. Cet entier est appelé la caractéristique de A.
2. Montrer que si $c = 0$ alors A contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{Z}$.
3. Montrer que si $c > 0$ alors A contient un sous-anneau isomorphe à $\mathbf{Z}/c\mathbf{Z}$.
4. Calculer la caractéristique des anneaux suivants : $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/4\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ et $A_1 \times \cdots \times A_n$ où les A_i sont des anneaux.
5. Montrer que si A est intègre alors $c = 0$ ou c est un nombre premier. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 8 Soient A un anneau et I un idéal de A. On appelle « racine de I » l'ensemble $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \geq 1, a^n \in I\}$.

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de A contenant I. Montrer que l'on a $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
2. Calculer $\sqrt{I}$ pour $A = \mathbf{Z}$ et $I = (0)$, $\mathbf{Z}$, $4\mathbf{Z}$, $8\mathbf{Z}$, $45\mathbf{Z}$, $m\mathbf{Z}$.
3. Montrer que l'anneau quotient $A/\sqrt{I}$ est « réduit », c'est-à-dire qu'il n'a pas d'élément nilpotent non nul.

Exercice 9 1. Déterminer le noyau du morphisme d'évaluation $\mathrm{ev}_z : \mathbf{Q}[X] \to \mathbf{C}$ dans chacun des trois cas suivants : $z = i$, $z = \sqrt{2}$, $z = e^{i\pi/4}$.

2. Que donne le théorème de factorisation ?

3. Que se passe-il si on remplace $\mathbf{Q}$ par $\mathbf{Z}$?

Exercice 10 Dans chacun des cas suivants, déterminer si l'idéal I est principal, premier, maximal. Exprimer le quotient A/I à l'aide d'anneaux plus « familiers » :

1. $A = \mathbf{R}[X]$ et $I = (X)$
2. $A = \mathbf{Z}[X]$ et $I = (X)$
3. $A = \mathbf{Q}[X]$ et $I = (X^2 - 2)$
4. $A = \mathbf{Z}[X]$ et $I = (X^2 - 2)$
5. $A = \mathbf{R}[X]$ et $I = (X^2 - 2)$
6. $A = \mathbf{R}[X]$ et $I = (X^2 - 1)$
7. $A = \mathbf{R}[X]$ et $I = (X^2 + 1)$
8. $A = \mathbf{C}[X]$ et $I = (X^2 + 1)$
9. $A = \mathbf{Z}[X]$ et $I = (2, X)$
10. $A = \mathbf{Z}[X]$ et $I = (m, X)$ où $m \in \mathbf{Z}$
11. $A = \mathbf{R}[X, Y]$ et $I = (X + Y)$
12. $A = \mathbf{R}[X, Y]$ et $I = (X, Y)$

Exercice 11 Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux.

1. Si J est un idéal premier de B, l'idéal $f^{-1}(J)$ de A est-il premier ?

2. Si J est un idéal maximal de B, l'idéal $f^{-1}(J)$ de A est-il maximal ?

Exercice 12 Soit $A = \mathbf{Z}[i]/(2 + i)$.

1. Soit $m \in \mathbf{Z}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur m pour que l'équation $(2 + i)z = m$ ait une solution $z \in \mathbf{Z}[i]$.

2. En déduire la caractéristique de A.

3. Montrer que l'unique morphisme $\varphi : \mathbf{Z} \to A$ de $\mathbf{Z}$ dans A est surjectif.

4. L'idéal $(2 + i)$ de $\mathbf{Z}[i]$ est-il premier ? Est-il maximal ?

Exercice 13 Soit $A = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$.

1. Soit $x_0 \in [-1, 1]$. Montrer que $\mathfrak{m}_{x_0} = \{f \in A \mid f(x_0) = 0\}$ est un idéal maximal de A et que l'on a $A/\mathfrak{m}_{x_0} \simeq \mathbf{R}$.

2. Montrer que tout idéal maximal de A est de la forme $\mathfrak{m}_{x_0}$ pour un certain $x_0 \in [-1, 1]$.

3. En déduire une bijection entre $[-1, 1]$ et l'ensemble des idéaux maximaux de A.

4. Montrer que l'anneau $B = \mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ possède un idéal maximal qui n'est pas de la forme $\{f \in B \mid f(x_0) = 0\}$ pour $x_0 \in \mathbf{R}$.