Exercice 1 Décomposer les permutations suivantes en produits de cycles à supports deux à deux disjoints et calculer la signature :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 2 & 7 & 9 & 6 & 10 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 5\ 9)(2\ 4\ 9), \sigma_4 = (1\ 8\ 6\ 7)(8\ 6\ 7\ 5)(6\ 7\ 5\ 1),$$

$$\sigma_5 = (1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)(6\ 7)(7\ 1), \sigma_6 = (1\ 8)(1\ 7)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2).$$

Exercice 2 Soient $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_r$ des éléments de $\mathfrak{S}_n$.

1) Montrer que l'on a $\mathrm{Supp}(\sigma) = \emptyset \iff \sigma = \mathrm{id}$.

2) Montrer que l'on a $\mathrm{Supp}(\sigma^{-1}) = \mathrm{Supp}(\sigma)$.

3) Montrer que pour $k \in \mathbf{Z}$ on a $\mathrm{Supp}(\sigma^k) \subseteq \mathrm{Supp}(\sigma)$.

4) Montrer que si $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_r$ alors $\mathrm{Supp}(\sigma) \subseteq \mathrm{Supp}(\sigma_1) \cup \ldots \cup \mathrm{Supp}(\sigma_r)$, avec égalité si $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ sont à supports deux à deux disjoints.

Exercice 3 1) Rappeler pourquoi deux permutations à supports disjoints commutent.

2) On considère les permutations

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 7 & 11 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 & 10 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

Montrer sans calcul que σ et τ commutent. Retrouver ce résultat par calcul direct.

3) Calculer σ^{2018}.

Exercice 4 1) Soient σ et τ deux permutations à supports disjoints, et $k \in \mathbf{Z}$. Montrer que l'on a $(\sigma\tau)^k = \mathrm{id} \iff \sigma^k = \tau^k = \mathrm{id}$.

2) Déterminer l'ordre d'une permutation en fonction des longueurs des cycles à supports deux à deux disjoints qui la composent.

Exercice 5 1) Soit $\sigma = (a_1\ a_2 \cdots a_\ell) \in \mathfrak{S}_n$ un cycle de longueur ℓ. Montrer que pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$ on a

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1)\ \tau(a_2) \cdots \tau(a_\ell)).$$

2) En déduire que deux cycles sont conjugués si et seulement s'ils ont même longueur.

3) Soient $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ des cycles à supports deux à deux disjoints dans $\mathfrak{S}_n$. Montrer que pour $\tau \in \mathfrak{S}_n$, les permutations $\tau\sigma_1\tau^{-1}, \ldots, \tau\sigma_r\tau^{-1}$ sont des cycles à supports deux à deux disjoints.

4) En déduire que deux permutations σ et σ' dans $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si et seulement si elles ont même « type », c'est-à-dire que les longueurs des cycles à supports deux à deux disjoints qui composent σ coïncident avec celles pour σ'. Dans ce cas, expliquer comment trouver explicitement une permutation τ telle que $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma'$.

5) Appliquer ce résultat aux permutations suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 2 & 7 & 9 & 6 & 10 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix},$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 5\ 9)(2\ 4\ 9), (1\ 8\ 6\ 7)(8\ 6\ 7\ 5)(6\ 7\ 5\ 1),$$

$$(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)(6\ 7)(7\ 1), (1\ 8)(1\ 7)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2).$$

Exercice 6 1) Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par chacune des familles suivantes :

(i) les transpositions $(1\ i)$ pour $2 \leq i \leq n$;

(ii) les transpositions $(i\ i+1)$ pour $1 \leq i \leq n-1$;

(iii) la transposition $\tau = (1\ 2)$ et le n-cycle $\sigma = (1\ 2 \cdots n)$.

2) Trouver un 4-cycle σ tel que $(1\ 3)$ et σ n'engendrent pas $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 7 Un joueur mélange un paquet de 32 cartes de la façon suivante : il sépare le paquet en deux moitiés égales, puis intercale une carte sur deux de chaque paquet, en gardant la première carte de la première moitié sur le dessus.

1) Montrer que l'on définit bien une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{32}$ en posant $\sigma(k) = 2k-1$ si $1 \leq k \leq 16$ et $\sigma(k) = 2k - 32$ si $17 \leq k \leq 32$. Quel est le lien avec le début de l'énoncé ?

2) Décomposer σ en produit de cycles à supports deux à deux disjoints et calculer son ordre et sa signature.

3) Que se passe-t-il si on change la façon de mélanger en gardant la première carte de la seconde moitié sur le dessus ?

Exercice 8 1) Déterminer les classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_4$ et leur cardinal.

2) Montrer que les éléments de $\mathfrak{A}_4$ sont d'ordre 1, 2 ou 3. Déterminer le nombre d'éléments d'ordre donné.

3) On veut montrer que $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe d'ordre 6. On rappelle que tout groupe d'ordre 6 est isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$ ou à $\mathfrak{S}_3$.

(a) Démontrer que $\mathfrak{A}_4$ n'a pas de sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$.

(b) Donner le nombre d'éléments d'ordre 2 dans $\mathfrak{S}_3$. En déduire que si $\mathfrak{A}_4$ avait un sous-groupe isomorphe à $\mathfrak{S}_3$ alors celui-ci contiendrait toutes les doubles transpositions. Conclure.

4) Déterminer un sous-groupe d'ordre 4 de $\mathfrak{A}_4$.

Exercice 9 Soit p un nombre premier. Soient τ une transposition et σ un p-cycle dans $\mathfrak{S}_p$. On veut montrer que σ et τ engendrent $\mathfrak{S}_p$.

1) Soit $\rho \in \mathfrak{S}_p$. Montrer que σ et τ engendrent $\mathfrak{S}_p$ si et seulement si $\rho\sigma\rho^{-1}$ et $\rho\tau\rho^{-1}$ engendrent $\mathfrak{S}_p$. En déduire que l'on peut supposer $\tau = (1\ 2)$, ce que l'on fera dans la suite.

2) Montrer qu'il existe $d \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $\sigma^d(1) = 2$. Justifier que σ^d est encore un p-cycle.

3) Montrer que σ et τ engendrent $\mathfrak{S}_p$ si et seulement si σ^d et τ engendrent $\mathfrak{S}_p$. En déduire que l'on peut supposer $\sigma(1) = 2$.

4) On écrit désormais $\sigma = (1\ 2\ a_3 \cdots a_p)$. Montrer qu'il existe $\rho \in \mathfrak{S}_p$ tel que $\rho\sigma\rho^{-1} = (1\ 2\ 3 \cdots p)$ et $\rho\tau\rho^{-1} = (1\ 2)$. Conclure.

Exercice 10 (Taquin de Sam Loyd) Montrer que, en utilisant uniquement les mouvements autorisés du jeu de taquin, on ne peut pas passer de la première configuration à la deuxième :

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	