Exercice 1 Dans $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}[X]$, effectuer la division euclidienne de P par Q :

1. $P = \overline{2}X^3 + \overline{2}X^2 + \overline{3}$ et $Q = X^2 + \overline{2}X + \overline{1}$
2. $P = \overline{2}X^2 + \overline{3}$ et $Q = \overline{3}X + \overline{1}$

Exercice 2 Le polynôme $P = X^3 + 1401X + 503$ est-il irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$? (On pourra réduire modulo 2). Qu'en est-il de $2P$?

Exercice 3 Dans $\mathbf{R}[X]$, calculer le pgcd, le ppcm et une relation de Bézout pour P et Q :

1. $P = X^3 + X + 4$ et $Q = X^2 + X + 2$
2. $P = X^3 + 2X^2 + X - 2$ et $Q = X^2 + 3X + 3$
3. $P = X^5 - 2X^4 + X^2 - X - 2$ et $Q = X^3 - X^2 - X - 2$
4. $P = X^4 + 2X^2 - X + 5$ et $Q = X^4 + 3X^2 + X + 1$

Exercice 4 Déterminer la réciproque des isomorphismes donnés par le lemme chinois :

1. $\mathbf{Z}/35\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/5\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$
2. $\mathbf{Z}/30\mathbf{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/5\mathbf{Z}$
3. $\mathbf{R}[X]/(X^4 + X^2) \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}[X]/(X^2) \times \mathbf{R}[X]/(X^2 + 1)$

Exercice 5 Déterminer si les anneaux $\mathbf{R}[X]/(X^3+X+4)$ et $\mathbf{R}[X]/(X^2+X+2)$ sont des corps, et si oui les identifier à des corps « connus ».

Exercice 6 (Entiers de Gauss) Soit $A = \mathbf{Z}[i]$. On pose $\forall z \in A, N(z) = |z|^2$.

1. Montrer que N est à valeurs dans $\mathbf{N}$ et que l'on a $\forall z \in A, z \in A^\times \iff N(z) = 1$. En déduire $A^\times = \{1, -1, i, -i\}$.
2. Soient z et z' dans A. Montrer que si z divise z' dans A alors $N(z)$ divise $N(z')$. La réciproque est-elle vraie ?
3. Les éléments 2 et 3 sont-ils irréductibles dans A ?
4. Montrer que si $N(z)$ est un nombre premier alors z est irréductible dans A. La réciproque est-elle vraie ?
5. Montrer que tout élément z de A non nul et non inversible s'écrit comme produit d'éléments irréductibles. On pourra raisonner par récurrence sur $N(z)$.
6. Lister tous les éléments $z \in A$ irréductibles pour $N(z) \leq 10$.
7. Décomposer en produits d'irréductibles les éléments $1 + 5i$, 10, $6 + 8i$ et $22 + 19i$.
8. On veut montrer que N munit A d'une structure d'anneau euclidien (voir exercice suivant). Montrer que pour tout $x \in \mathbf{C}$, il existe $q \in A$ tel que $|x - q|^2 < 1$ (faire un dessin). En déduire que pour tous $z \in A$ et $z' \in A \setminus \{0\}$, il existe $q \in A$ et $r \in A$ tels que $z = z'q + r$ et $N(r) < N(z')$.

Exercice 7 (Anneaux euclidiens) Un anneau euclidien est un anneau intègre A muni d'une application $N : A \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$ telle que pour tous $a \in A$ et $b \in A \setminus \{0\}$, il existe $q \in A$ et $r \in A$ tels que $a = bq + r$ et $r = 0$ ou $N(r) < N(b)$.

1. Montrer que $\mathbf{Z}$, tout corps $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}[X]$ et $\mathbf{Z}[i]$ sont des anneaux euclidiens.
2. Montrer qu'un anneau euclidien est principal.
3. Montrer que l'algorithme d'Euclide reste valable dans tous les anneaux euclidiens.
4. Pour $A = \mathbf{Z}[i]$, calculer un pgcd et une relation de Bézout pour a et b :

   (a) $a = 1 + 5i$ et $b = 6 + 8i$

   (b) $a = 5 - i$ et $b = 4 + 7i$

Exercice 8 (Un anneau non principal) Soit $A = \{P \in \mathbf{Q}[X] \mid P'(0) = 0\}$.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbf{Q}[X]$.
2. Déterminer les inversibles de A.
3. Montrer que X^2 et X^3 sont irréductibles dans A.
4. Donner deux décompositions distinctes (même à permutation près et aux inversibles près) en produit d'irréductibles de X^6. En déduire que A n'est pas principal.
5. Montrer que l'idéal $I = (X^2, X^3)$ n'est pas principal.